UNA INTERPRETACIÓN MULTIDISCIPLINARIA DE LOS ESPACIOS CARACTERÍSTICOS, VECTORES CARACTERÍSTICOS Y VALORES CARACTERÍSTICOS

Isadore Nabi

Siguiendo a (Liipschutz, 1993, pág. 335), sea A una matriz $n - cuadrada$ sobre un cuerpo de escalares que se denotará como K. A todo escalar λ que pertenece al cuerpo K se le denomina *valor propio*, *autovalor* o *valor característico* de la matriz A si existe un vector columna no nulo $v \in K^n$ para el que se cumple que $Av = \lambda v$. Así, todo vector que satisfaga esta relación se denomina *vector propio* de A perteneciente al valor propio λ. El lector seguramente observará que cada múltiplo escalar kv (en donde k denota cualquier miembro del cuerpo K) es a su vez un vector propio, puesto que $A(kv) = k(Av) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$. El conjunto E_λ de todos los vectores propios pertenecientes a λ es un subespacio de K^λ, conocido como *espacio propio* de λ. Si $\dim E_\lambda = 1$, E_λ recibe el nombre de recta propia y λ se llama *factor de escala*. Los términos autovector, vector propio o vector característico son equivalentes y, por consiguiente, perfectamente intercambiables.

Lo anterior expresa la definición matemática de los valores característicos y sus respectivos vectores característicos, pero ¿qué son en general? Para responder a tal pregunta es necesario realizar un abordaje multidisciplinario del concepto, tanto en su región de nacimiento teórico (las ciencias formales, particularmente las Matemáticas) y en su región de aplicación (las ciencias naturales y sociales). En términos del Álgebra Lineal, una matriz es un espacio vectorial y, por ello, en algunos lugares se le encuentra bajo el nombre de *espacio matricial* $n - dimensional$, en donde n es un valor sumamente alto, presumiblemente $n \to \infty$. Es necesario no perder de vista que en el contexto vectorial las coordenadas y las dimensiones son equivalentes, aunque en términos topológicos esto no es cierto a nivel general (*i.e.*, la dimensión topológica puede divergir del número de coordenadas del sistema que se analice).

En la teoría matemática del procesamiento de señales existe un concepto conocido como *datos ruidosos*. Los "datos ruidosos" son un fenómeno consistente en que el contenido de la señal no es óptimo, lo que debe entenderse en términos de que no contribuyen significativamente a revelar el contenido de la señal.

En esta misma teoría, el ruido en las señales es un componente inherente a las mismas. Lo anterior se interpreta en esta investigación en términos de que la totalidad de un fenómeno sólo se manifiesta en el largo plazo y esta totalidad no está conformada únicamente por la forma dotada de contenido, tampoco únicamente por el contenido mismo y ni siquiera exclusivamente por la esencia de ese contenido, por lo que los atributos no esenciales que tipifican a los fenómenos deben ser inherentes a ellos.

En el contexto de la Ciencia de Datos, cuando el espacio muestral posee un número sumamente elevado de dimensiones (o al menos de coordenadas), la data ruidosa es un obstáculo inevitable de sortear y, con la finalidad de reducir tal ruido (nótese que más no eliminarlo), se vuelve inexorablemente necesario reajustar a la baja el espacio vectorial (todo espacio muestral es un espacio vectorial), *i.e.*, reajustando el número de dimensiones que lo conforman, esperando (probabilísticamente hablando) que con este reajuste se destruyan subespacios muestrales que alojen ruido y no otro tipo de datos (que expresan la esencia o el contenido de la señal) o, en su defecto, de que exista una tendencia bien-definida (a sabiendas de lo relativo al contexto de utilización que puede resultar este término) al resultado favorable de los dos resultados posibles antes planteados. Nótese que al procedimiento descrito anteriormente es al que se le conoce como *reducción de dimensionalidad de los* datos.

Tras la reducción de dimensionalidad, que en contexto de los sistemas de ecuaciones se expresa como la supresión de una o más ecuaciones del sistema lineal que describe el espacio de estudio (que a su vez implica la eliminación de uno o más atributos que describen el fenómeno analizado), se obtiene el subespacio (del espacio original) que contiene los datos de interés (este es pues, el contenido de la señal) para el análisis cuantitativo del fenómeno de estudio, es a este subespacio que se le conoce como *espacio propio*.

A su vez, este subespacio es generado por lo que en Álgebra Lineal se conoce como *vectores característicos*, los cuales deben entonces interpretarse como la expresión unívoca de la organización estructural de tales atributos de interés (*i.e.*, de los atributos relevantes). Entonces, ¿qué son los autovalores? Para comprender la definición de los autovalores, junto con la manera en que la lógica anterior puede aplicarse en cualquier ciencia en la que se empleen los objetos matemáticos antes descritos, es necesario echar mano de la Mecánica Cuántica, específicamente un análisis de realizar un análisis de la función de onda o ecuación de Schrödinger.

En mecánica cuántica, el estado de un sistema (cuántico, obviamente) está descrito por la célebre ecuación de Schrödinger, conocida técnicamente como *función de onda*, también conocida bajo el nombre de *función de estado* o, aún más revelador es que también es llamada *vector de estado*; el ejemplo es adecuado porque la Mecánica Cuántica ocurre en espacios de Hilbert, que son espacios que generalizan de forma natural las intuiciones populares de espacio y que cumplen el requisito de ser de altísima dimensionalidad. Cada elemento del sistema (magnitud medible y observable) tiene un correspondiente operador (asignado para describir cada magnitud, en donde el término *operador* es, en este contexto, una generalización -a nivel espacial- del concepto de *función de funciones* o *funcional*, es decir, de funciones aplicadas a funciones) y este operador se representa matricialmente.

Como es ampliamente conocido, puesto que esto fue lo que generó el debate fundacional Bohr-Einstein [que fue el debate en que la Física "se estrenó" en Filosofía de la Ciencia -aunque al igual que muchos futbolistas, su "debut" no fue dulce)], previo a la medición de cada elemento del sistema cuántico, su estado estará indeterminado (el debate Bohr-Einstein giró en torno a si esto era ignorancia humana o designio divino, imponiéndose la segunda visión, la cual fue esgrimida y defendida por Bohr y sus adeptos[1]) y ocurrirá por tanto una *superposición cuántica*, cuyo principio consiste en que antes de la medición del estado, en el contexto de un sistema de partículas de naturaleza cuántica, las partículas tendrán todos los estados que teóricamente les son posibles. Lo anterior se expresa matemáticamente como una suma lineal de todos los posibles ***vectores característicos*** del operador matricial antes descrito, y de ello se desprende teóricamente que cada estado es un vector característico.

Al realizar la medición, la función de onda se determina (o colapsa, y de ahí el debate aún inconcluso) y se decanta por alguno de los estados (expresados matemáticamente como los vectores característicos del sistema de ecuaciones cuánticas que conforman el operador matricial) de los que teóricamente eran posibles. Matemáticamente hablando, los ***valores característicos*** son los parámetros λ_i que determinan la longitud de los vectores característicos (están asociados entre sí uno-a-uno, *i.e.*, por cada vector característico existe un valor característico -sin embargo, en estructuras matemáticas más sofisticadas que los espacios de Hilbert esto no es cierto-), pero esto no dice nada de su significado, sólo revela su utilidad aplicada a diferentes y distintos contextos.

Como señala (LibreTexts, 2021, pág. 124), la resolución de la función de onda o ecuación de Schrödinger es, matemáticamente hablando, un problema de determinación de los valores característicos de dicha ecuación.

[1] De hecho, Schrödinger publicó su artículo como una crítica al nuevo enfoque de la Física planteado por Heisenberg, conocido como *Mecánica Matricial*; sin embargo, tras la interpretación que Max Born hizo de la ecuación de Schrödinger [quien interpretó la función de onda como la función de probabilidad de que la partícula en cuestión se encuentre localizada en determinado lugar y el valor concreto arrojado por tal ecuación como la probabilidad concreta de que la partícula de interés se encuentre en determinado lugar] la cosa tomó un rumbo diferente. De buenas intenciones está empedrado el camino al infierno, se dice popularmente.

Como se sabe de las Matemáticas, cuando un operador se aplica sobre una función el resultado será otra función; sin embargo, un caso especial ocurre cuando la nueva función (generada por la aplicación del operador) sobre la vieja función es proporcional a esta última función, a la vieja. Lo mismo ocurre con la ecuación de Schrödinger, en la cual la proporcionalidad se expresa, empleando el símbolo α, el cual denota proporcionalidad directa [véase (LibreTexts, 2021, pág. 14)].

Esta expresión de proporcionalidad, que se cristaliza matemáticamente en la expresión $\hat{A}\psi\ \alpha\ \psi$. En la expresión anterior, ψ es un vector de estado (expresados matemáticamente como vectores característicos) que puede expresar cualquier estado que teóricamente le sea posible a la partícula antes de la medición y de su respectivo colapso, mientras que $\hat{A}$ es un operador lineal, el cual en el contexto de la Mecánica Cuántica expresa las magnitudes de la Mecánica Clásica como operadores lineales (específicamente como operadores matriciales); debe recordarse, además, que no todas las reglas del Álgebra Lineal aplican en el Álgebra Escalar (al menos no con la misma fuerza de ley), por ejemplo, la conmutatividad.

En el caso de proporcionalidad antes descrito, la función de onda antes expuesta puede adoptar la siguiente forma:

$$\hat{A}\psi = k\psi$$

En la expresión anterior, k representa una constante de proporcionalidad, que permite la equivalencia entre $\hat{A}\psi$ y ψ. Esta constante de proporcionalidad k no es otra cosa que el valor característico correspondiente al vector característico ψ.

Lo anterior implica, considerando además que en los sistemas dinámicos tanto el signo de los valores característicos (así como su relación recíproca) son lo que se requiere para determinar la estabilidad de largo plazo del sistema, que los valores característicos deben interpretarse como aquellos parámetros [a su vez modeladas por funciones, pues no hay que olvidar que para obtener los valores característicos de deben realizar múltiples operaciones, lo que por definición implica múltiples operadores (lo que claramente implica que la estructura matemática detrás de la generación de los valores característicos no es simple, prueba de ello es, como se verifica en (LibreText, 2021, pág. 36), que la ecuación general de Schrödinger $\widehat{H}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$ es conocida como *ecuación eigenvalor*, en donde "eigen" es una palabra alemana que se traduce al español como "característico" o "que le es propio", es decir, es la ecuación mediante la cual se obtienen los valores característicos] que permiten que el estado del sistema no se altere tras verse afectado por fuerzas externas a él (cristalizadas en el operador matricial $\hat{A}$).

Así, los valores característicos expresan la esencia del fenómeno analizado, *i.e.*, lo que hay de menos mutable y que lo caracteriza de mejor forma.

REFERENCIAS

LibreText. (2021). *QUANTUM STATES OF ATOMS AND MOLECULES.* California: Open Education Resource LibreTexts Project. Retrieved from https://batch.libretexts.org/print/Finished/chem-4467/Full.pdf

LibreTexts. (2021). *Quantum Chemestry.* California: Open Education Resource LibreTexts Project. Retrieved from https://batch.libretexts.org/print/Finished/chem-210771/Full.pdf

Liipschutz, S. (1993). *ÁLGEBRA LINEAL.* Madrid: McGraw-Hill, Inc.