UNA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA, TEÓRICA Y MATEMÁTICA SOBRE EL CARÁCTER DIALÉCTICO DE LOS FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS DE LA COMPLEJIDAD EN LOS SISTEMAS DINÁMICOS NO-LINEALES DE LARGO PLAZO

ISADORE NABI

Abstracto

Desde Pierre-Simon Laplace en 1840 con su célebre "Ensayo Filosófico Sobre Probabilidades", los filósofos y científicos se han interesado por dicotomía, sugerida por la observación de los hechos de la realidad, entre la incertidumbre y el determinismo. Henri Poincaré en 1908 coge el testigo de Laplace, comenzando así el esfuerzo consciente por unificarlas filosóficamente y dando así nacimiento a la Teoría del Caos, para que luego Edward Lorenz en 1963 diera a luz los Sistemas Complejos en su investigación titulada "Deterministic Nonperiodic Flow" y finalmente fue Benoit Mandelbrot en 1982 quien revolucionó la Geometría con el planteamiento de las superficies fractales en su obra "La Geometría Fractal de la Naturaleza". Así como para los sistemas complejos ha sido de vital importancia ir comprendiendo unificadamente el caos y el determinismo, también fue para los sistemas filosóficos (particularmente la Antigua Grecia y del Idealismo Clásico Alemán) alcanzar precisión en las definiciones de las categorías esencia, forma, contenido, apariencia y fenómeno. Estas categorías filosóficas fueron trabajadas por los filósofos soviéticos en su búsqueda por comprender de manera holista la realidad, siendo plasmadas en el célebre "Diccionario Filosófico" publicado en 1971. La presente investigación plantea que la forma óptima de instrumentalizar esa visión filosófica es nutriéndola de los hallazgos realizados en el campo de la Teoría del Caos y también que la forma óptima de depurar teóricamente lo relacionado a los sistemas complejos es mediante su análisis a la luz de la Lógica Dialéctica-Materialista.

Palabras Clave: Materialismo Dialéctico, Sistemas Complejos, Fractales, Teoría del Caos, Escuela de Filosofía Soviética.

ÍNDICE GENERAL

I. Antecedentes Filosóficos, Teóricos y Matemáticos

Esencia, al igual que *Fenómeno*, es una categoría filosófica estudiada desde los tiempos de la antigua Grecia hasta la posmodernidad actual por las escuelas de pensamiento filosófico más importantes y representativas de cada época. Llamada también *sustancia* desde la antigüedad, represente el *kernel* de todo sistema filosófico general y, por supuesto, el sistema hegeliano no es la excepción. En Hegel también se encuentran otras categorías filosóficas estudiadas por las escuelas referidas desde la génesis del pensamiento filosófico, tal es el caso de la categoría *Fenómeno*. Sobre la base del pensamiento lógico hegeliano fue que construyen Marx y Engels la Lógica

Dialéctica Materialista (de ahora en adelante, *LDM*), así como sobre ella se erigió la obra "Materialismo y Empiriocriticismo" de Lenin en 1908. Esta obra, junto con el esfuerzo de alcanzar una fundamentación científica desde la Historia de la lógica ética-moral contenida en el sistema teórico de Marx y Engels, así como de la búsqueda de un análisis filosófico y científico holista, que permita comprender como un todo la Economía Política, la Biología y la Física. Afortunadamente este intento de hacer filosofía y ciencia de forma diferente no se limitó a la Unión Soviética y a nivel de la Biología han surgido importantes filósofos marxistas que han realizado sus contribuciones a dicha ciencia desde la lógica y la filosofía fundada por Marx y Engels. Tal es el caso en una primera etapa de John Burdon Sanderson Haldane, como más adelante lo serían Stephen Jay Gould, Richard Lewontin y Richard Levins[1]. Sin embargo, es ampliamente conocido que también dentro de la misma Unión Soviética hubo resultados en las ciencias a la luz de la *LDM*, tal es el caso de Alexander Oparin con "El Origen de la Vida"[2] en Biología, de Lev Landau[3] en Física y Nikolái Semiónov en Química, limitándonos a mencionar solamente algunos de los más representativos. De todo este proceso se hizo eco la Filosofía Soviética. Esta filosofía fue, por diversos motivos, preponderantemente de carácter marxista. Fue hasta 1971, tras un intenso proceso que buscaba depurar internamente al Partido Comunista de la Unión Soviética, suscitado en su vigésimo congreso, de esa parte

---

[1] J.B.S. Haldane es conocido por, entre muchos otros aportes, ser uno de los padres de la *Síntesis Evolutiva*. Por su parte, Stephen Jay Gould es conocido por los *Equilibrios Puntuados* y *Enjutas*, Richard Lewontin es co-autor de Gould, ganador del Premio Crafoord en 2015 en Ciencias de la Vida (que equivale a una extensión de las categorías clásicas que cubren los premios Nobel) y pionero en Biología Molecular, mientras que Richard Levins por sus aportes a la teoría evolutiva en entornos cambiantes y la meta-población (que busca ser una teoría Marxista de la Biología). De hecho, Lewontin y Levins, tras muchos de trabajo e investigación en la Universidad de Harvard, publicaron a través de Harvard University Press en 1985 una obra titulada "El Biólogo Dialéctico", ¿así como también escribieron un artículo titulado "Stephen Jay Gould-What Does It Mean To Be a Radical?" en el que explican los vínculos científicos entre Haldane y Gould, así como también la influencia positiva que la ideología de Gould hizo en su trabajo. Finalmente, la pareja de biólogos publicó en 2007 otra obra titulada "Biología Bajo Ataque: Ensayos Dialécticos Sobre Ecología, Agricultura y Salud".

[2] Curiosamente el otro científico que arribó, en general, a los mismos resultados que Oparin fue J.B.S. Haldane.

[3] Sólo es necesario estudiar el ahora célebre *Curso de Física Teórica* para notar cómo esta lógica permea todos los desarrollos teóricos de Landau y compañía.

de la deleznable herencia stalinista que se conoce como “Culto a la Personalidad”, que la filosofía soviética fue capaz de cristalizar determinadas conquistas del pensamiento marxista. En palabras de los filósofos Mark Rosental y Pavel Iudin, autores del célebre *Diccionario Filosófico* de la Unión Soviética:

“La presente edición del Diccionario Filosófico se distingue considerablemente de las anteriores; la última apareció casi diez años atrás. Durante este período se han producido grandes cambios en la U.R.S.S. y en el mundo. El XX Congreso del P.C.U.S. demarcó una nueva frontera en la vida del Partido y de la sociedad soviética. Se criticó resulta e implacablemente el culto a la personalidad de Stalin, que había ocasionado muy graves daños a la práctica de la edificación socialista y al desarrollo de la teoría marxista. La lucha del Partido contra las consecuencias del culto a la personalidad, por restablecer los principios y normas leninistas de vida creó condiciones propicias para el auge de la investigación científica en todos los dominios de la ciencia marxista-leninista.
En el XXII Congreso del P.C.U.S. se aprobó el nuevo Programa del Partido. En este programa se (…) realiza un análisis profundo (…) del desarrollo mundial contemporáneo y se pone de manifiesto la dialéctica de dicho desarrollo. El programa plantea ante la ciencia marxista en conjunto, incluida la filosófica, una serie de problemas nuevos, cuya investigación contribuirá al sucesivo desenvolvimiento y concreción de las tesis del materialismo dialéctico e histórico.

Naturalmente, todo lo que acabamos de exponer y los nuevos datos de las ciencias naturales, en tumultuoso desarrollo, reclamaban una reelaboración esencial del diccionario y que de él se eliminaran muchas y serias deficiencias contenidas en las anteriores ediciones.” (Rosental & Iudin, 1971, pág. III).

El diccionario en cuestión, autoría editorial de los filósofos soviéticos mencionados, cumple con lo planteado por ellos en la sección titulada *ADVERTENCIA* de la obra mencionada. No sólo se hace eco de todos los desarrollos filosóficos y científicos al interior de la Unión Soviética, sino también en el resto del mundo. Sin embargo, no sólo se limita a Filosofía y Economía Política, el diccionario soviético abarca también Historia, Biología, Física (Clásica, Relativista, Cuántica), Lógica y otras diversas áreas del saber, como, por ejemplo, el Arte, la Estética, la Ética y la Moral.

Para comprender la importancia que esto tiene para el pensamiento filosófico marxista es necesario recordar que la diferenciación entre *Esencia* y *Fenómeno* es fundamental para toda Teoría del Conocimiento y, por consiguiente, para toda Filosofía, para toda Filosofía de la Ciencia, para toda Sociología de la Ciencia y para todo análisis en general, así como también recordar que en la obra de Marx y Engels no existe una definición nítida de tales categorías. Lo mismo ocurre con las categorías *Forma* y *Contenido*, que no poseen en lo absoluto una importancia trivial, puesto que, como se verá más adelante, expresan aspectos analíticos fundamentales de los objetos.

El *Diccionario Filosófico* logra definir, en términos generales, de forma nítida las categorías filosóficas mencionadas. Sin embargo, existen diversas precisiones no triviales que no están presentes, cierta relativización de las implicaciones de las definiciones no realizada resulta necesaria, así como también elaborar una interconexión bien definida entre los pares filosóficos "*Esencia y Fenómeno*" y "*Forma y Contenido*". Precisamente esa es el objetivo que busca cumplir el siguiente artículo de investigación.

En la posmodernidad, debido a los descubrimientos que las innovaciones tecnológicas van arrojando en todos los campos del conocimiento, cobra mayor relevancia la comprensión de las categorías filosóficas mencionadas, así como su definición precisa, en el contexto de los conocidos *Sistemas Complejos*. Estos sistemas tienen a su vez relación con la idea que se expresa en Matemáticas, muy extendida en su gremio desde la aparición de la obra de *The Fractal Geometry of Nature* de Benoit Maldelbrot, de que la realidad no posee la geometría suave y relativamente simple que se le atribuye desde el nacimiento de las Matemáticas como Ciencia y de la Geometría como rama de las Matemáticas. Así, el matemático francés plantea "¿Por qué la geometría se describe a menudo como "fría" y "seca"? Una razón radica en su incapacidad para describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y la corteza no es suave, ni los rayos viajan en línea recta (...) De manera más general, afirmo que muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados, que, en comparación con Euclides -término utilizado en este trabajo para denotar toda la geometría estándar-, la Naturaleza no exhibe simplemente un grado más alto sino un nivel de complejidad completamente diferente. El número de escalas distintas de longitud de patrones naturales es infinito para todos los propósitos prácticos." (Mandelbrot, 1983, pág. 1). Sin embargo, la obra de Mandelbrot versa sobre la complejidad de la realidad principalmente a nivel de apariencia, fenómeno y forma, no tanto en contenido y esencia. Sobre la complejidad de la realidad al nivel concreto de contenido y esencia versan principalmente las investigaciones de Edward Lorenz, célebre matemático y meteorólogo estadounidense del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT, por sus siglas en inglés), quien es el padre de los ahora ampliamente conocidos *Sistemas Complejos* y consiguió renovar el interés en el estudio y desarrollo de la *Teoría del Caos*[4], que desde la génesis de la Mecánica Clásica, el determinismo filosófico Laplaciano y el cuestionamiento filosófico del azar realizado por Poincaré había sido relegado a un segundo plano en las investigaciones científicas.

Es necesario detenernos brevemente a analizar a grandes ragos la investigación de Edward Lorenz. En 1963 publicó un artículo titulado "Deterministic Nonperiodic Flow" para el MIT, resultado de manuscrito enviado el 18 de noviembre del año anterior. Sobre su investigación nos dice Lorenz: "Los sistemas finitos de ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias deterministas pueden diseñarse para representar el flujo hidrodinámico disipativo forzado. Las soluciones de estas ecuaciones se

[4] Aunque formalmente no existía hasta la aparición de la investigación de Lorenz en 1963 titulada *Deterministic nonperiodic flow* publicada en el *Journal of Atmospheric Sciences*, ya existía de manera incipiente.

pueden identificar con trayectorias en el espacio de fase. Para aquellos sistemas con soluciones limitadas, se encuentra que las soluciones no periódicas son normalmente inestables con respecto a pequeñas modificaciones, de modo que estados iniciales ligeramente diferentes pueden evolucionar hacia estados considerablemente diferentes. Se muestra que los sistemas con soluciones limitadas poseen soluciones numéricas limitadas. Un sistema simple que representa la convección celular se resuelve numéricamente. Se encuentra que todas las soluciones son inestables y casi todas son no periódicas. La viabilidad de la predicción meteorológica a muy largo plazo se examina a la luz de estos resultados." (Lorenz, 1963, pág. 1) y fue esa la génesis de la formalización del natalicio de la Teoría del Caos.

Investigaciones realizadas a la luz de los sistemas complejos en el terreno de las Ciencias Físicas y de la Biología, han permitido descubrir una variedad de sistemas complejos que se convierten poco a poco en interés de la comunidad científica en general, a saber: los *Atractores Extraños No-Caóticos*, acuñados precisamente en las investigaciones de Lorenz. Esta es la forma de llamar a sistemas complejos sobre los cuales se posee una cantidad y calidad de información necesaria y suficiente como para que sea posible, al menos en términos generales, determinar su comportamiento, es decir, sistemas complejos que, en términos generales, son deterministas. En estos sistemas, a diferencia de los usuales sistemas de ecuaciones diferenciales (en diferencias, según sea el caso) que conocemos, no existe lo que se conoce en la primera clase de sistemas mencionada como *diagramas de fase* del sistema, lo que existe es lo que se conoce como *Atractor*, que es un esbozo de diagrama de fase, un boceto de la trayectoria que describe el sistema durante su evolución, que, aunque borroso, está lo suficientemente definido para ser analizado con la necesaria y suficiente rigurosidad científica.

En 2015 se publicó la investigación *Strange Nonchaotic Stars* en la *Physical Review Letters*. Ahí, en (Linder, y otros, 2015, págs. 054101-1), se describe un sistema dinámico no lineal[5] regido por un cociente de frecuencias irracional, tendencialmente equivalente al número φ[6] encontrado en la naturaleza (específicamente las conocidas como *estrellas doradas*[7] descubiertas gracias al *Telescopio Espacial Kepler*), lo cual describen los autores como un hecho histórico sin precedentes y que plantea ser un paso fundamental en la clasificación y modelación detallada de las diversas estrellas existentes.

El atractor de esta clase encontrado de forma natural es modelado gráficamente como se presenta a continuación:

Figura 1

[5] Que usualmente es equivalente a hablar de *Sistemas Complejos*.

[6] Conocido también como número áureo, medida áurea, razón dorada, razón áurea, número de oro, proporción áurea, divina proporción, razón extrema y media. Es un número resultado del cociente $\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}$, sobre el cual hay que decir algunas cuestiones. Los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como razón de dos números enteros, i.e., es infinitesimal y la infinitud de sus decimales no responde a ninguna regla de repetición ni período. Su definición aparece en (Euclides, 1994, págs. 56-60), ahí dice en primera instancia "(…) Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) es al menor.", para posteriormente decir "Si se divide en dos partes iguales un ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados restantes del triángulo; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo." Por razones que no están claras y que ameritan en sí mismas una investigación, el número que cumple esta definición, es la divina proporción que ha sido objeto de análisis y deseo de materialización durante siglos, incluso desde antes de Euclides, que en (Euclides, 1994, pág. 55) se sugiere que existe la probabilidad de que date desde la época de Aristóteles.

[7] "Esta estrella, llamada KIC 5520878, es un tipo de estrella variable periódica conocida como variable "RRc Lyrae". Pulsa en una gran cantidad de frecuencias que están todas relacionadas con dos frecuencias, f1 y f2, que tienen una proporción áurea. La proporción áurea o "media áurea" es un número irracional que tiene importancia en geometría, biología y arte. Su presencia en un sistema dinámico puede significar que el sistema se comporte como un "atractor extraño no caótico". En este caso, "extraño" significa que el sistema se puede caracterizar como fractal, y "no caótico" significa que la dinámica se encuentra en el punto medio entre el orden y el caos." (Johnston, 2015).

PRL **114**, 054101 (2015) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 6 FEBRUARY 2015

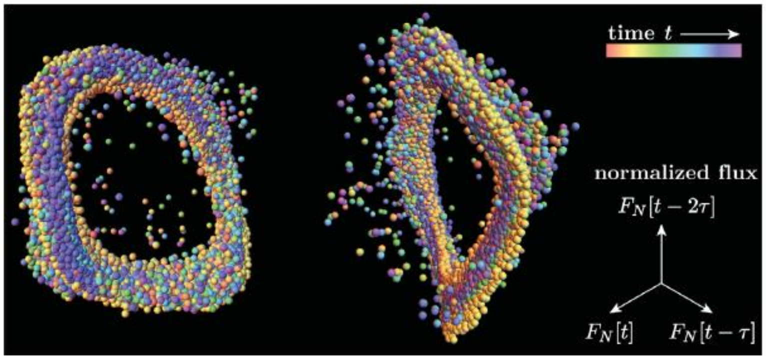


FIG. 2 (color). Attractor reconstruction. Two views of a three-dimensional plot of normalized flux F_N at $t = n\delta t$ successively delayed by $\tau = 2\delta t$. This delay coordinate embedding "unfolds" the time series into a warped torus, suggesting two-frequency nonlinear dynamics. Equal-sized spheres locate data. Rainbow colors code time, from red to violet. Flux triplets straddling data gaps appear far from torus.

Fuente: (Linder, y otros, 2015, págs. 054101-3).

Sin embargo, las Ciencias Físicas no son el único campo del intelecto dentro del cual este tipo de sistemas dinámicos capturan progresivamente el interés de los especialistas. Como se evidencia en (Sharma, 2003), varios años antes el "caos determinista" y la complejidad fractal en los sistemas ya habían sido de interés en las Ciencias Médicas, específicamente en el área cardiovascular. (Sharma, 2003, pág. 1) plantea que "Los sistemas fisiológicos como el sistema cardiovascular son capaces de cinco tipos de comportamiento: equilibrio, periodicidad, cuasi-periodicidad, caos determinista y comportamiento aleatorio. Los sistemas adoptan uno o más de estos comportamientos dependiendo de la función para la que han evolucionado. Los conceptos matemáticos emergentes de las matemáticas fractales y la teoría del caos están ampliando nuestra capacidad para estudiar el comportamiento fisiológico. La geometría fractal se observa en la estructura física de vías, redes y estructuras macroscópicas como la vasculatura y la red His-Purkinje del corazón. La estructura fractal también se observa en procesos en el tiempo, como la variabilidad de la frecuencia cardíaca. La teoría del caos describe la dinámica subyacente del sistema, y el comportamiento caótico también se observa en muchos niveles, desde las moléculas efectoras en la célula hasta la función cardíaca y la presión arterial. Esta revisión analiza el papel de la estructura fractal y el caos en el sistema cardiovascular a nivel del corazón y los vasos sanguíneos, y a nivel celular. Se destacan las consecuencias funcionales clave de estos fenómenos y se proporciona una perspectiva sobre los posibles orígenes evolutivos del comportamiento caótico y la estructura fractal. La discusión no es matemática con énfasis en los conceptos subyacentes clave."

Las figuras que serán expuestas a continuación expresan los distintos tipos de comportamiento que los sistemas complejos pueden exhibir, así como también su aplicación a la Biología.

Figura 2

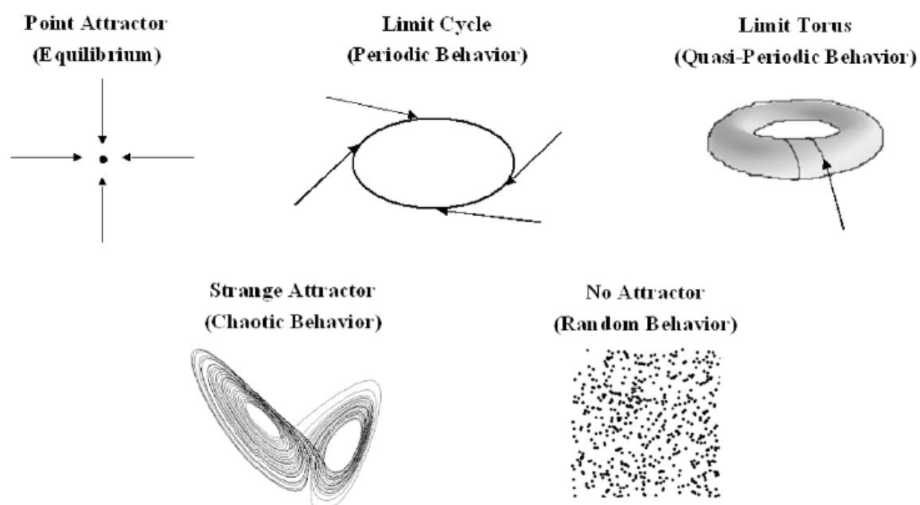
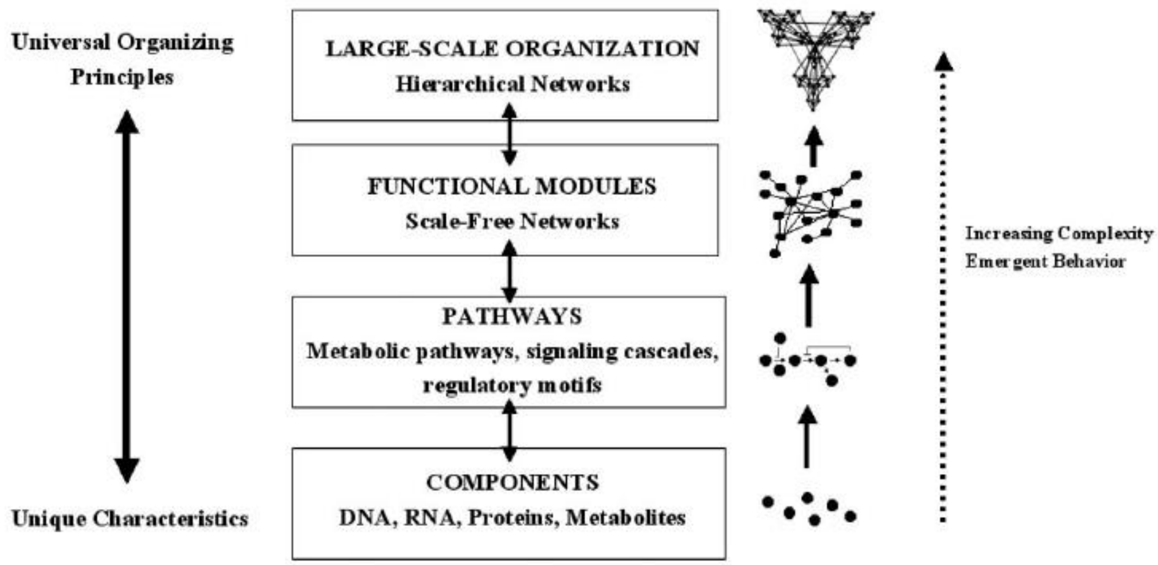


Fig. (1). Possible states of a system represented in phase space. Equilibrium is represented as a point and periodic behavior as a cycle. Quasiperiodic behavior arises because the system is cycling with at least two frequencies whose ratio is not rational. A strange attractor is a sign of chaotic behavior, and has a low fractal dimension. The attractor shown is the Lorenz attractor. Random behavior produces a random scatter of points in phase space, with a high fractal dimension.

Fuente: (Sharma, 2003, pág. 112).

Figura 3



Fuente: (Sharma, 2003, pág. 118).

En la misma línea, las Ciencias de la Computación no se han quedado rezagadas, como puede observarse en (Aravindh, Venkatesan, & Lakshmanan, 2018, pág. 10). La investigación puede ser resumida, en palabras de los autores, de la siguiente manera:

"Investigamos la respuesta de sistemas no-lineales controlados cuasi-periódicamente que exhiben extraños atractores no caóticos (SNA) a señales de entrada deterministas. Demostramos que, si se utilizan dos ondas de tipo seno cuadradas de manera aperiódica como entrada a un sistema de oscilador Duffing de pozo doble accionado cuasi-periódicamente, la respuesta del sistema puede producir una salida lógica controlada por tal forzamiento. Cambiar el umbral o la polarización del sistema cambia la salida a otra operación lógica y el bloqueo de memoria. La interacción de la no-linealidad y el forzamiento cuasi-periódico produce un comportamiento lógico y el resultado emergente de tal sistema es una puerta lógica. Además, se muestra que los comportamientos lógicos persisten incluso para el ruido de piso experimental. Así, el SNA resulta ser una herramienta eficiente para la computación."[8]

Las figuras presentadas a continuación representas las diferentes simulaciones estadísticas realizadas por los investigadores informáticos para estudiar el comportamiento de un sistema cuasi-periódico regido por la ecuación de Duffling[9]:

Figura 4

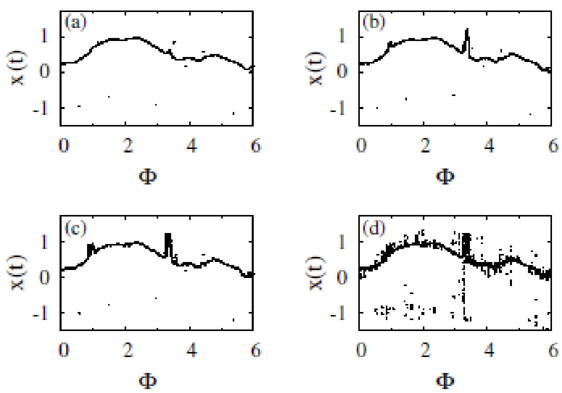


FIG. 1. Projection of the numerically simulated attractors of Eq.(1) in the (ϕ -x) plane for various values of 'A' (a) torus for A=0.3110 (b) wrinkled torus for A= 0.31120 (c) SNA for A= 0.311227 (d) chaos for A=0.31124 and ε=0.05, when $I = 0$ and $D = 0.0$

---

[8] En el original se lee: "We investigate the response of quasi-periodically driven nonlinear systems exhibiting strange non-chaotic attractors (SNAs) to deterministic input signals. We show that if one uses two square wavesin aperiodic manner as input to a quasi-periodically driven double-well Duffing oscillator system, the response of the system can produce logical output controlled by such a forcing. Changing the threshold or biasing of the system changes the output to another logic operation and memory latch. The interplay of nonlinearity and quasiperiodic forcing yields logic behaviour and the emergent out-come of such a system is a logic gate. It is further shown that the logical behaviours persist even for experimental noise floor. Thus, the SNA turns out to be an efficient tool for computation."

[9] Una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, la cual es utilizada en diversas áreas de la ciencia y posee la característica de exhibir un comportamiento caótico. En la investigación de los informáticos se plantea de con la siguiente simbología:

Figura 4

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\alpha\dot{x} - \beta(x^3 - x) + A(\sin\theta + \sin\phi) + I + \varepsilon + \sqrt{D}\xi(t)$$
$$\dot{\theta} = \omega_1, \quad \dot{\phi} = \omega_2 \qquad (1)$$

Fuente: (Aravindh, Venkatesan, & Lakshmanan, 2018, pág. 2).

Fuente: (Aravindh, Venkatesan, & Lakshmanan, 2018, pág. 3).

Figura 5

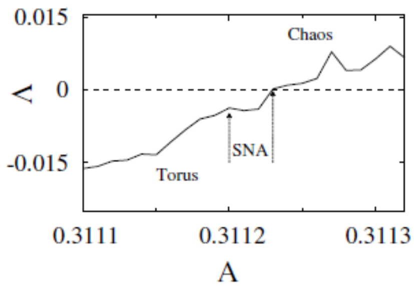


FIG. 2. Maximal Lyapunov exponent 'Λ' versus control parameter 'A', in the absence of inputs I_1 and I_2 with bias $\varepsilon = 0.05$ and with no noise (D=0.0).

Fuente: (Aravindh, Venkatesan, & Lakshmanan, 2018, pág. 3).

Figura 6

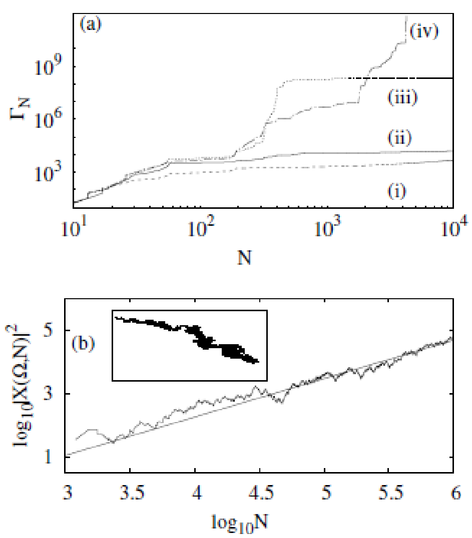


FIG. 3. (a) Phase sensitivity exponent Γ_N versus N showing (i) torus for A=0.3111, (ii) wrinkled torus for A=0.3112, (iii) SNA for A=0.311227 and (iv) chaos for A=0.31124.(b) Finite-time Fourier spectrum $|X(\Omega, N)|^2$ vs N on logarithmic scale for SNA for A=0.311227 with the exponent $\beta = 1.21$. The inset (b) shows fractal walk in the complex plane (ReX, ImX) for the SNA attractor.

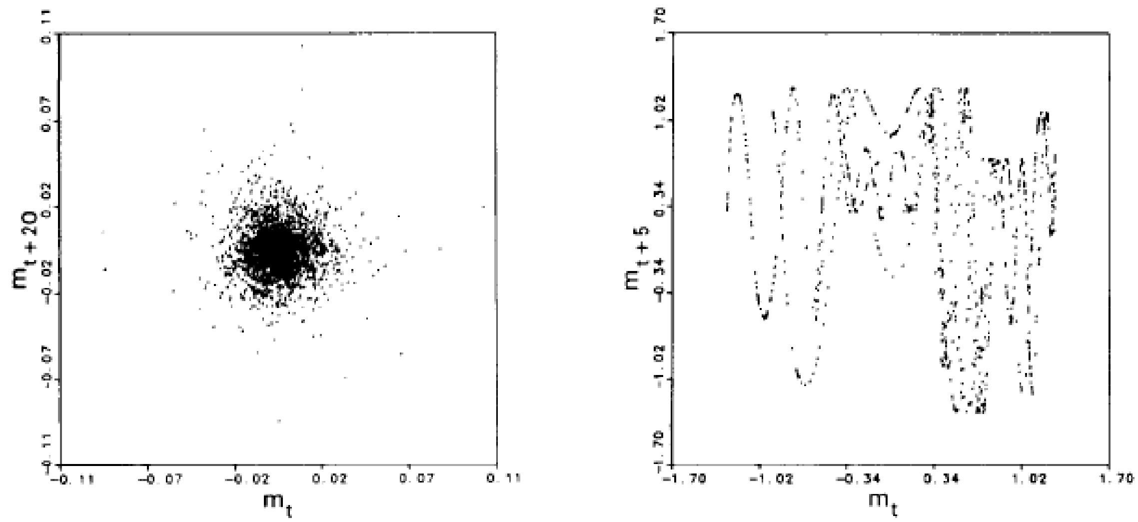
Fuente: (Aravindh, Venkatesan, & Lakshmanan, 2018, pág. 3).

También en Econometría el "caos determinista" y los Atractores fractales han sido de interés como herramientas para la inferencia estadística sobre sistemas dinámicos no paramétricos, como puede observarse en (Barnet & Chen, 1988, pág. 275). Como ahí se lee:

"Se propone el uso del caos determinista y la teoría de atractores extraños como herramientas en la inferencia estadística, y se proporciona una aplicación a la econometría. Se encuentra que los datos económicos de alta calidad son adecuados para el uso de esos métodos. Sin embargo, se encuentra que los datos económicos de baja calidad poseen una alta relación ruido / señal, de modo que la señal potencialmente caótica no puede identificarse con precisión. Cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande y la relación ruido/señal es lo suficientemente baja, como se muestra en el caso de ciertos agregados monetarios, encontramos que el atractor extraño producido por la señal caótica puede detectarse y usarse para producir señales potentes e inferencias estadísticas útiles sobre la estructura de la economía."

A continuación, los resultados gráficos de las simulaciones sobre los atractores de los fenómenos de la realidad económica que los econometristas modelaron a través de sistemas complejos:

Figura 7

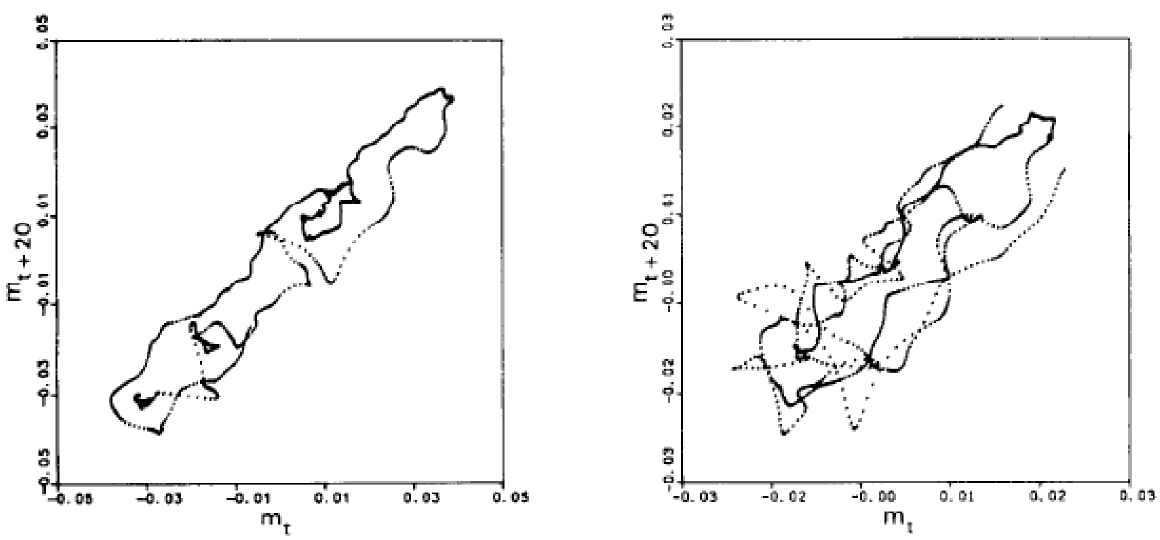


Case 1: IBM daily common stock returns. The time interval, δ, is one day. The number of observations, N, is 2000.

Case 2: The Henon attractor. The time interval, δ, is one iteration. The number of observations is 1000.

Fuente: (Barnet & Chen, 1988, pág. 288).

Figura 8



Case 3: DDM3 with time interval, δ, equal to one week. The sample size, N, is 807.

Case 4: DDM2^{C} with time interval, δ, equal to one week. The sample size, N, is 807.

Fig. 1. Phase portraits, consisting of phase space plots of the n-histories, when the embedding dimension $n = 2$.

Fuente: (Barnet & Chen, 1988, pág. 288).

Así, también aparecen esfuerzos multidisciplinarios por hacer posible una taxonomía bien definida de los sistemas complejos, tal es el caso de la conocida *Prueba de Casos 0-1*. Como señalan en (Gottwald & Melbourne, 2016, pág. 221). En esa investigación, los autores hacen una reseña de la prueba mencionada, buscando determinar su efectividad para distinguir entre sistemas periódicos y sistemas cuasi-periódicos o, visto desde otra perspectiva, entre sistemas dinámicos y sistemas dinámicos caóticos en línea con ya expuesto en esta investigación. En palabras de los autores:

"Aquí revisamos los aspectos teóricos y prácticos de la prueba 0-1 para el caos para sistemas dinámicos deterministas. La prueba está diseñada para distinguir entre dinámica regular, es decir, periódica o cuasi-periódica, y dinámica caótica. Funciona directamente con la serie temporal y no requiere ninguna reconstrucción del espacio de fase. Esto hace que la prueba sea adecuada para el análisis de mapas discretos, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales de retardo, ecuaciones diferenciales parciales y series de tiempo real. Para ilustrar el rango de aplicabilidad, aplicamos la prueba a ejemplos de dinámica discreta como el mapa logístico, los mapas de intermitencia de Pomeau-Manneville con funciones de autocorrelación sumables y no sumables, y el mapa estándar de Hamilton que exhibe un caos débil. También consideramos ejemplos de dinámica de tiempo continuo como el sistema de Lorenz-96 y una ecuación de Schrödinger no lineal impulsada y amortiguada. Finalmente, mostramos la aplicabilidad de la prueba 0-1 para series de tiempo contaminadas con ruido como se encuentra en aplicaciones del mundo real."

De la investigación anterior conviene retomar dos imágenes importantes. La primera es la que retrata la diferencia entre una dinámica y una dinámica caótica, tal como se muestra a continuación:

Figura 9

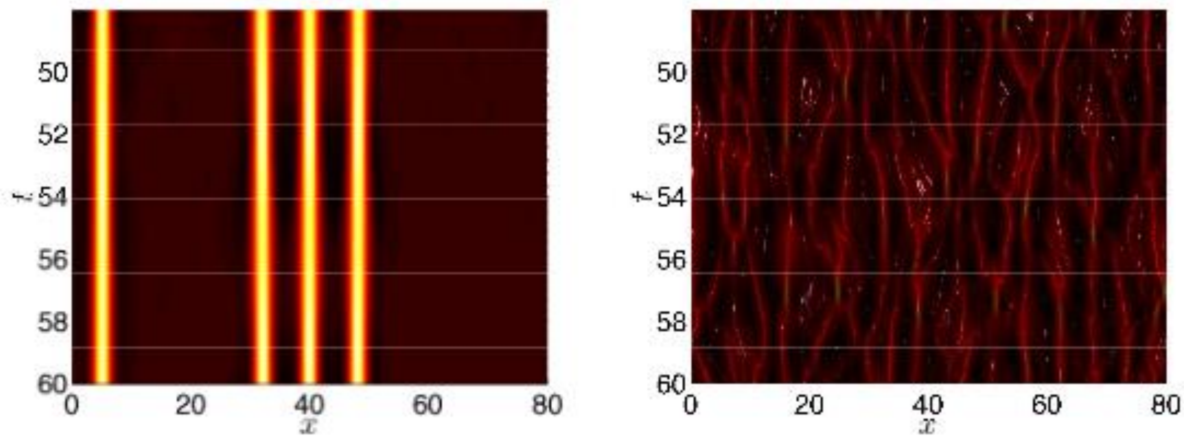


Fig. 17 Hovmöller diagram of $|Q(x,t)|$ for regular dynamics with $\varepsilon = 0.095$ (left) and chaotic dynamics with $\varepsilon = 0.2$ (right) for the driven and damped Schrödinger equation (15).

Fuente: (Gottwald & Melbourne, 2016, pág. 240).

La segunda imagen, la más importante, es la que representa la capacidad de la prueba para analizar niveles de caos en variables cuyos datos están contaminados por *ruido*[10]:

[10] Defínase como un término general utilizado para hacer referencia a afectaciones no deseadas por variables externas que sufre la *función señal*, i.e., la función que provee al investigador información sobre un fenómeno. Aunque son ampliamente utilizadas fundamentalmente en Ingeniería, específicamente en Electrónica y Telecomunicaciones, son un concepto teórico general que brindan las Matemáticas.

Figura 10

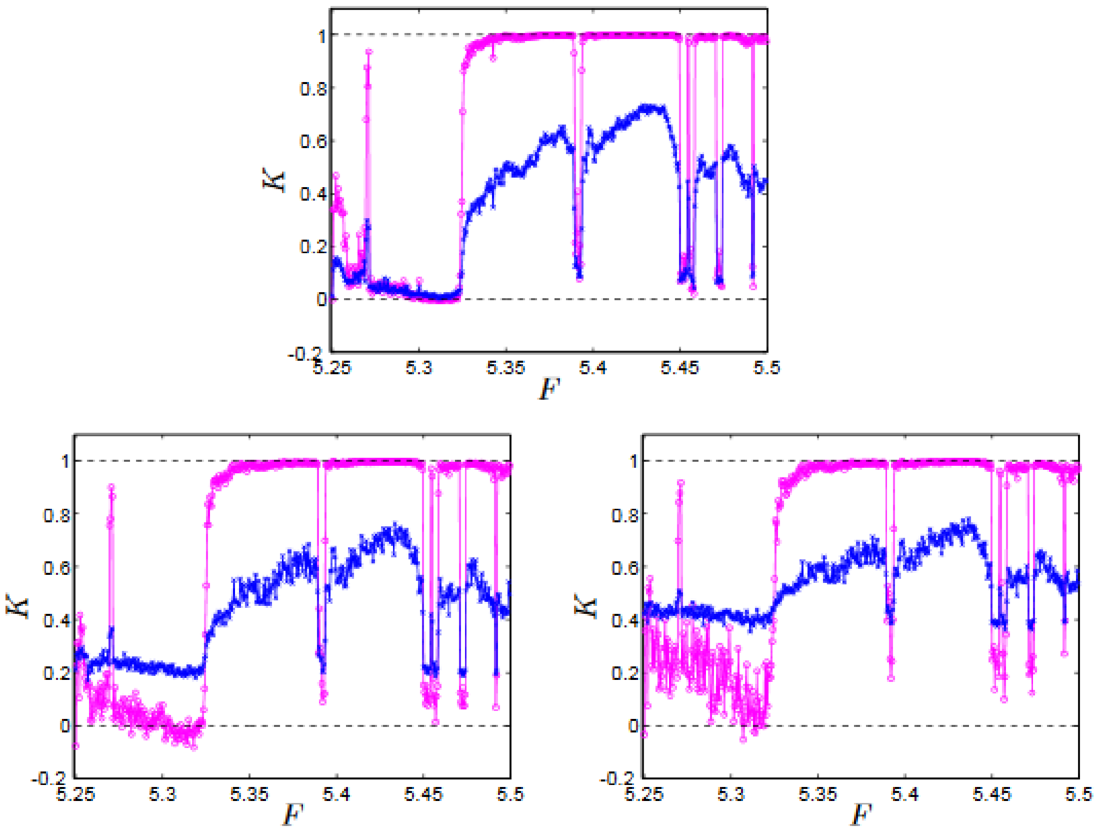


Fig. 18 Plot of K versus F for the Lorenz-96 system (16) for $5.25 \leq F \leq 5.5$ increased in increments of 0.005. We used $N = 100,000$ data points sampled at 2.5 time units. Top: Noise free data; Bottom left: 10% measurement noise; Bottom right: 20% measurement noise. K is calculated via the regression method for $M_c(n)$ (crosses, blue) and for the correlation method for $D_c(n)$ with subtracted noise variance (circles, magenta). The horizontal lines indicate the limiting cases $K = 0$ and $K = 1$. We used 100 randomly distributed values of c.

Fuente: (Gottwald & Melbourne, 2016, pág. 243).

La importancia filosófica de esta prueba analizada y desarrollada por los autores radica en que precisamente promete ser una herramienta valiosa para trazar líneas claras (no por ello dejan de ser borrosas en un grado no trivial –sino no fueran sistemas complejos–) que permitan separar los diferentes tipos de sistema que encontremos en la Naturaleza, según la dificultad que por diversos motivos puedan presentar para su aprehensión[11].

Los sistemas caóticos han planteado en la comunidad de filósofos, matemáticos y físicos algunos problemas interesantes. Como señala (Werndl, 2013, pág. 3), "Existe una creencia generalizada en las comunidades de la filosofía, las matemáticas y la física (y se ha afirmado en varios artículos y libros) que hay una nueva implicación del caos en la imprevisibilidad, lo que significa que los sistemas caóticos son impredecibles de una manera que otros sistemas deterministas no lo son. Más específicamente, lo que generalmente se cree es que hay al menos una nueva implicación del caos para la imprevisibilidad que es cierta en todos los sistemas caóticos."

En la misma línea, en Psiquiatría existen investigaciones como (Pezard & Nandrino, 2001, pág. 260) que tratan sobre complejidad sistémica. Sobre la investigación, sus autores afirman que: "Nuestro objetivo es mostrar aquí que este marco puede convertirse en una herramienta valiosa en campos científicos como la neurociencia

[11] Aunque el caos ocurra, sólo es apariencia resultante de la complejidad. Para clarificar el concepto de caos, (Werndl, 2013, pág. 8) señala que "De acuerdo con el primer concepto de imprevisibilidad, un sistema es impredecible cuando cualquier conjunto de condiciones iniciales se extiende más que un diámetro específico que representa la precisión de predicción de interés (generalmente de mayor diámetro que el del conjunto de condiciones iniciales). Cuando esto sucede, el sistema es impredecible en el sentido de que la predicción basada en cualquier conjunto de condiciones iniciales es tan imprecisa que es imposible determinar el resultado del sistema con la precisión de predicción deseada (...) Un ejemplo bien conocido es un sistema en el que, debido a la divergencia exponencial de soluciones, cualquier conjunto de condiciones iniciales de al menos un diámetro específico se extiende en períodos cortos de tiempo más que un diámetro de interés. El segundo concepto de imprevisibilidad es probabilístico. Dice que, para fines prácticos, cualquier conjunto de condiciones iniciales es irrelevante, es decir, no hace ni más ni menos probable que el estado se encuentre en una región del espacio de fase de interés. De acuerdo con este concepto, no solo es imposible predecir con certeza en qué región estará el sistema, sino que, además, para efectos prácticos, el conocimiento de las posibles condiciones iniciales no aumenta ni disminuye la probabilidad de que el estado se encuentre en un determinado estado. región del espacio de fase. Un ejemplo es que el conocimiento de cualquier conjunto de condiciones iniciales suficientemente pasadas es prácticamente irrelevante para predecir que el estado del sistema está en una región del espacio de fase ". En la misma línea, la autora señala que "Aproximadamente, los sistemas caóticos son sistemas deterministas que muestran un comportamiento irregular, o incluso aleatorio, y una dependencia sensible a las condiciones iniciales (SDIC). SDIC significa que pequeños errores en las condiciones iniciales conducen a soluciones totalmente diferentes." (Werndl, 2013, pág. 9).

y la psiquiatría, donde los objetos poseen una dependencia del tiempo natural (es decir, propiedades dinámicas) y características no lineales. La aplicación de conceptos de dinámica no lineal sobre estos temas es más precisa que una metáfora vaga y puede arrojar una nueva luz sobre el funcionamiento y disfunción mental. Una clase de redes neuronales (redes neuronales recurrentes) constituye un ejemplo de la implementación del concepto de sistema dinámico y proporciona modelos de procesos cognitivos (...) El estado de actividad de la red está representado en su espacio de estados y la evolución temporal de este estado es una trayectoria en este espacio. Después de un período de tiempo, esas redes se establecen en un equilibrio (una especie de atractor). La fuerza de las conexiones entre neuronas define el número y las relaciones entre esos atractores. Los atractores de la red se suelen interpretar como "representaciones mentales". Cuando se impone una condición inicial a la red, la evolución hacia un atractor se considera como un modelo de procesamiento de la información (…) Este procesamiento de la información no se define de manera simbólica, sino que es el resultado de la interacción entre elementos distribuidos. Varias propiedades de los modelos dinámicos pueden utilizarse para definir una forma en la que las propiedades simbólicas emergen de las propiedades físicas y dinámicas (…) y así pueden ser candidatos para la definición de la emergencia de propiedades mentales sobre la base de la dinámica neuronal (42). Sin embargo, las propiedades mentales también pueden ser consideradas como el resultado de una dinámica subyacente sin mención explícita de la neuronal (…) En ese caso, se pueden utilizar herramientas dinámicas para dilucidar la psicodinámica freudiana (…) Se han utilizado redes neuronales recurrentes para proponer interpretación de varias disfunciones mentales."

A su vez, la Hipótesis de la Dínamo, que es una teoría científica multidisciplinaria (involucrando las Ciencias Físicas y la Geología) que busca explicar el mecanismo por el que un cuerpo celeste genera un campo magnético a su alrededor, ha sido probada mediante simulaciones estadísticas realizadas con diversos métodos numéricos, siguiendo la estructura de las ecuaciones magnetohidrodinámicas provistas por el modelo del geodínamo, allá por 1995 con modelos de tres dimensiones, según se menciona en (Kilifarska, Bakmutov, & Melnyk, 2020, pág. 18).

Así, los hechos históricos de la Filosofía y las Ciencias confirman que, al menos a nivel esencial, la búsqueda de los filósofos soviéticos por buscar desarrollar la *LDM* a un nivel lo suficientemente depurado para crear una metodología analítica general que permitiera abordar la realidad desde sus diferentes aristas, no sólo era válida sino necesaria y a medida transcurre el tiempo se convierte cada vez más en necesidad inexorable. Esta investigación es un modesto tributo a esos grandes filósofos soviéticos que, independientemente de los desaciertos cometidos a nivel político, representan una etapa dorada y fundamental en el desarrollo filosófico del Marxismo.

II. El Determinismo Filosófico en el marco de los Sistemas Complejos

II.I. Generalidades Sobre el Surgimiento del Determinismo en las Ciencias como Aplicación del Determinismo Filosófico

De la mano de los sistemas complejos aparece también un cuestionamiento válido al determinismo filosófico. Laplace, pionero en la aplicación del determinismo filosófico a las ciencias, aborda magistralmente la relación entre las probabilidades y el determinismo:

"Estrictamente hablando, puede decirse que casi todo nuestro conocimiento es problemático, y que en el pequeño número de cosas que somos capaces de conocer con certeza, incluso en las propias ciencias matemáticas, los principales medios para determinar la verdad –la inducción y la analogía– están basados en probabilidades, de tal suerte que todo el sistema del conocimiento humano está conectado con la teoría expuesta en este ensayo (…) Todos los eventos, incluso aquellos que a causa de su insignificancia no parecen seguir las grandes leyes de la naturaleza, son el resultado de ella justo tan necesariamente como las revoluciones del sol. Ante la ignorancia de los lazos que unen tales eventos con todo el sistema del universo, se les ha hecho depender de causas finales o del azar, dependiendo de si ocurren y se repiten con regularidad o si aparecen sin respecto al orden; pero estas causas imaginarias han retrocedido gradualmente ante los crecientes límites del conocimiento y han desaparecido por completo ante la sana filosofía, que sólo ve en ellas la expresión de nuestra ignorancia de las verdaderas causas (…) Los eventos presentes están conectados con los anteriores por un vínculo basado en el evidente principio de que una cosa no puede ocurrir sin una causa que la produzca. Este axioma, conocido como el principio de razón suficiente, se extiende incluso a las acciones que se consideran indiferentes; la voluntad más libre es incapaz sin un motivo determinativo que le dé nacimiento. Si asumimos dos posiciones con exactamente circunstancias similares y descubrimos que la voluntad está activa en una e inactiva en la otra, decimos que su elección es un efecto sin causa. Entonces es, dice Leibniz, el ciego azar de los epicúreos. La opinión contraria es una ilusión de la mente que, perdiendo de vista las evasivas razones de la elección de la voluntad en cosas indiferentes, cree que la elección está determinada por sí misma y sin motivos algunos." (Laplace, 1902, págs. 3-4).

En este sentido, fue el gran filósofo francés Henri Poincaré, padre de la Teoría del Caos[12] quien terminó de clarificar el asunto: "Lo que hay para nosotros es solo por nuestra fragilidad y nuestra ignorancia. E incluso sin ir más allá de nuestra frágil humanidad, lo que es casualidad para los ignorantes ya no es oportunidad para los sabios. El azar es solo la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición, aquellos cuyas leyes ignoramos." (Poincaré, 1908, pág. 65)

---

[12] Como señala (Oestreicher, 2007, pág. 282), el nacimiento de la Teoría del Caos debe registrarse en la siguiente reflexión de Poincaré:
"Una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos dejar de ver, por eso decimos que este efecto se debe al azar. Si supiéramos exactamente las leyes de la naturaleza y el estado del universo en el momento inicial, podríamos predecir con precisión el estado del mismo universo en un momento posterior. Pero incluso si las leyes naturales ya no nos guardaran ningún secreto, solo podríamos conocer el estado aproximadamente. Si esto nos permite predecir el estado sucesivo con la misma aproximación, eso es todo, y decimos que el fenómeno ha sido predicho, que está gobernado por leyes. Pero esto no siempre es así, y pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden generar diferencias muy grandes en los fenómenos finales. Un pequeño error en el primero conducirá a un error enorme en el segundo. Entonces, la predicción se vuelve imposible y tenemos un fenómeno aleatorio."

Así, como acertadamente señala (Oestreicher, 2007, pág. 282), “Un siglo después de Laplace, Poincaré indicó que la aleatoriedad y el determinismo se vuelven algo compatibles debido a la imprevisibilidad a largo plazo”. Por supuesto, la Teoría del Caos se encuentra aún en su primera etapa de desarrollo y la anterior referencia solamente muestra que sigue estando pendiente responder diversas preguntas sobre los sistemas complejos, por ejemplo, ¿cómo y por qué, en general, en el largo plazo la aleatoriedad y el determinismo se vuelven compatibles?

II.II. Sobre los Principios Fundamentales de la Teoría del Caos

Los principios fundamentales de la Teoría del Caos pueden resumirse como en la figura presentada a continuación:

Figura 11

Table I. Definitions of concepts related to the history of chaos theory.*
• **Causality principle.** Every effect has an antecedent, proximate cause.
• **Determinism.** A philosophical proposition that every event is physically determined by an unbroken chain of prior occurrences.
• **Predictability.** This refers to the degree that a correct forecast of a system's state can be made either qualitatively or quantitatively.
• **Model.** A pattern, plan, representation, or description designed to show the structure or workings of an object, system, or concept.
• **Dynamical system.** A system that changes over time in both a causal and a deterministic manner, ie, its future depends only on phenomena from its past and its present (causality) and each given initial condition will lead to only one given later state of the system (determinism). Systems that are noisy or stochastic, in the sense of showing randomness, are not dynamical systems, and the probability theory is the one to apply to their analysis.
• **Phase space.** An abstract space in which all possible states of a system are represented which, each possible state of the system corresponding to one unique point in the phase space.
• **Sensitivity to initial conditions.** This is when a change in one variable has the consequence of an exponential change in the system.
• **Integrable system.** In mathematics, this refers to a system of differential equations for which solutions can be found. In mechanics, this refer to a system that is quasiperiodic.
• **Linear system.** A system is said to be linear when the whole is exactly equal to the sum of its components.
• **Attractor.** A set to which a dynamical system evolves after a long enough time.
• **Characteristic Lyapunov time.** The characteristic time of a system is defined as the delay when changes from the initial point are multiplied by 10 in the phase space.
• **Feedback.** A response to information, that either increases effects (positive feedback), or decreases them (negative feedback), or induces a cyclic phenomenon.
• **Self-similarity.** This means that an object is composed of subunits and sub-subunits on multiple levels that (statistically) resemble the structure of the whole object. However, in every day life, there are necessarily lower and upper boundaries over which such self-similar behavior applies.
• **Fractal.** Is a geometrical object satisfying two criteria: self-similarity and fractional dimensionality.
• **Fractal dimension.** Let an object in a n-dimensions space be covered by the smallest number of open spheres of radius r. The fractal dimension is log(N)/log(1/r) when r tends towards 0.

Table I. Definitions of concepts related to the history of chaos theory.*

*Some of the terms are used with different meanings in fields other than physics. For example, the adjective linear pharmacokinetics describes a body clearance of a constant fraction per unit of time of the total amount of a substance in the body, while a nonlinear pharmacokinetics describes the elimination of a constant quantity of compound per unit of time. Also, feedback is a well-known term in biology or medicine, while its use in physics is less familiar to nonphysicists.

Fuente: (Oestreicher, 2007, pág. 280).

En la misma línea, la Teoría del Caos y la Complejidad Sistémica escapan de los linderos de la Lógica Formal y esta es quizás su consecuencia más importante. Como se señala en (Marxist.org, 2018), "Sin embargo, lo que es más significativo, la teoría de la complejidad ha demostrado que los fenómenos en un sistema complejo se derivan de la estructura interna del sistema que, en principio, no puede derivarse de esa estructura interna por los métodos de la lógica formal. La limitación empíricamente establecida de la lógica formal es más o menos reconocida fuera de los matemáticos profesionales, y es, en líneas generales, la misma que la falacia comúnmente aceptada del reduccionismo."

II.III. Sobre la Lógica Cuántica, Lógica Rough, Lógica Fuzzy y otras Lógicas No-Formales en General

Por estas y otras razones, desde mediados del siglo pasado han surgido esfuerzos para expandir los límites de la lógica formal. Estos esfuerzos incluyen la Lógica Cuántica, la Lógica Difusa, la Lógica de Probabilidades, la Lógica Polivalente y la Lógica Fractal.

La Lógica Cuántica es, como puede inferirse de (Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2002), desde cualquier perspectiva un derivado de la Lógica Formal, por cuanto puede verse tanto como una versión modificada de la Lógica Proposicional (que es el orden cero, i.e., lógica de primer orden sin variables o cuantificadores, que a su vez es una colección de sistemas formales –los que propuso Hilbert en su programa para axiomatizar todas las Matemáticas), o como una Lógica Polivalente no-conmutativa y no-asociativa, sin embargo, la lógica polivalente es solamente una generalización de la Lógica Formal, que toma de forma más laxa el Principio del Tercero Excluido. De hecho, la Lógica Probabilística es una variación de la Lógica Polivalente, por eso es que la prueba de hipótesis estadísticas puede verse como una versión laxa de la prueba por contradicción o reducción al absurdo (como señala (Russell, 2014), profesor de la Universidad de Manitoba). En efecto lo es, por cuanto proviene de una lógica (la polivalente) que es una versión laxa de la Lógica Formal. En este sentido, generalizar la Lógica Formal de Aristóteles implica simultáneamente flexibilizar la aceptación del Principio del Tercero Excluido. Así, aparece también la Lógica Fractal, que es un esfuerzo interesante poco conocido a cargo de Anders Torvill Bjorvand, que como señala su autor en (Bjorvand, 1995, pág. 36), "Fractal logic is not a logic in the strict mathematical sense of the word. In order to be that, it would have to have axioms, well-formed formulae, and inference rules.

Neither one of these can truly be said to exist in what I have proposed under the term fractal logic."; esta lógica se basa en los aportes realizados por las Neurociencias, la Computación Evolutiva, la Teoría de los Fractales y la Teoría de Conjuntos Difusos (conocidos en inglés como *Rough Sets*, planteados por el científico computacional Zdzisław I. Pawlak).

En la misma línea, está la Lógica Difusa, que es la lógica proveniente de la Teoría de Conjuntos Difusos (*Fuzzy Set Theory* en inglés) planteada por Lofti A. Zadeh como extensión de las nociones clásicas de conjuntos. Todas estas lógicas han sido ampliamente usadas en la simulación computacional, sin embargo, es común que aparezca entre los científicos computacionales una cierta falta de claridad para distinguir las diferencias entre los conjuntos difusos (*Fuzzy Sets*) y los conjuntos aproximados (*Rough Sets*) al momento de desarrollar *Aprendizaje Automático*. Al respecto hay que decir que aunque ambos buscan ser generalizaciones de la Lógica Formal, son generalizaciones alcanzadas por distintas vías.

En Teoría de Conjuntos existe la categoría *función indicatriz*[13], la cual se expresa en ambas teorías de forma generalizada como *función membresía*. Los conjuntos difusos generalizan el comportamiento de los conjuntos clásicos mediante la identificación a priori de una función membresía e inician un proceso que busca ajustar los datos a los supuestos teóricos estipulados (a la teoría que se está probando), mientras que los conjuntos aproximados comienzan el proceso descrito sin necesidad de la identificación en cuestión. Esto lleva a concluir a algunos investigadores como Sandipan Karmakar del Instituto Xavier de Negocios de Bhubaneswar en la India que "Los conjuntos Rough y Fuzzy son casi iguales en cuanto a la aplicación. Pero teóricamente son diferentes, lo que hace que los Rough Sets sean superiores a los

[13] Debe entenderse como una función definida en un conjunto X que indica la pertenencia a un elemento en un subconjunto A de X, que tiene el valor 1 para todos los elementos de A y el valor 0 para todos los elementos de X que no están en A. Generalmente se denota con un símbolo 1 o I, a veces en negrita, con un subíndice que especifica el subconjunto.

Fuzzy (opinion personal[14]) (…) Los conjuntos aproximados comienzan a ajustar ciegamente los datos a partir de los cuales se calculan los valores de las funciones de pertenencia. Esta es la razón por la que los conjuntos Rough explican mejor la incertidumbre, ya que imitan lo que dicen los datos. En mi opinión, el conjunto Rough es más adecuado en el caso de la ciencia de datos, donde la información previa y el conocimiento sobre el proceso en consideración no están disponibles y los analistas tienen que confiar exclusivamente en los datos." (ResearchGate, 2018). En la misma línea, Ganesan G. de la Universidad Adikavi Nannaya, doctor en Filosofía radicado en el área de Matemáticas y Ciencias de la Información, plantea que "Rough Fuzziness: Para usar cuando planea aproximar una entrada fuzzy bajo un conocimiento nítido. Fuzzy Roughness: para usar cuando planea aproximar una entrada fuzzy bajo conocimiento Rough." (ResearchGate, 2020). Sin embargo, se ha planteado brevemente esta discusión no para resolverla, sino para mostrar que en definitiva, ambos tipos de conjunto servirán en el *Aprendizaje Automático* para distintos tipos de circunstancias que determinarán la validez teórica de su aplicación práctica y que ambos abren paso a los científicos de datos hacia un hermoso universo de opciones imposibles de soñar desde la Teoría de Conjuntos Clásica.

Así, la era del determinismo científico absoluto ha acabado. Esto es así no porque la realidad no sea determinista, lo que hace que no acabe la era del determinismo filosófico, sino porque nuestra evolución científica y tecnológica, mediante su

---

[14] Respecto a las opiniones personales de un ser humano desde su faceta de investigador (y que no necesariamente estarán respaldadas desde el oficialismo científico), debe realizarse una valoración positiva (aunque no necesariamente sean verdaderas) siempre que el fundamento de las mismas sea la práctica científica del investigador y que la lógica bajo la cual procese su práctica científica para transformarla en experiencia, en *criterio experto*, sea, al menos esencialmente, una lógica científica (fundamentada en estudios de planteamientos científicos y prácticas científicas). El criterio experto y la información histórica son elementos fundamentales en el *meta-análisis* planteado por Ronald Fisher, que es ir mucho más allá de la prueba de hipótesis estándar, como se señala en (Perezgonzalez, 2015, pág. 3). Esto va acorde también a lo planteado por (Gigerenzer, 2004, pág. 599), quien al respecto dice "Lo que está en juego aquí es la importancia de una buena estadística descriptiva y exploratoria en lugar de la prueba mecánica de hipótesis con respuestas sí-no. Buenas estadísticas descriptivas (a diferencia de las cifras sin barras de error o barras de error poco claras, y el agregado de rutina en lugar del análisis individual, por ejemplo) es necesario y en general suficiente."

impacto en creación, desarrollo y sofisticación de nuestros instrumentos de medición de la realidad, nos ha mostrado que la realidad es lo suficientemente compleja para que tales instrumentos, así como nuestro intelecto, no puedan capturarla de manera absoluta. Así, se vuelve más indispensable que en cualquier otro momento en la historia de la Filosofía y las Ciencias un regreso no sólo a los *sistemas filosóficos* en el sentido de formalización del pensamiento filosófico[15] (que cayeron en "desuso" más o menos desde Hegel), sino también a sus categorías filosóficas fundamentales, i.e., *esencia*, *fenómeno*, *forma*, *contenido* y *apariencia*. Esto con la finalidad de poder realizar un estudio más profundo y detallado de los sistemas complejos, permitiendo delimitar filosóficamente con mayor claridad esta clase de sistemas y, por consiguiente, facilitando también su delimitación teórica. Además, también facilita el análisis empírico, mediante una modelación más precisa de los aspectos componentes de la realidad que se encuentran bajo análisis.

III. Hacia una Interpretación Dialéctica de la Complejidad

III.I. Generalidades

Como referencia teórica de esta sección, se tomará la obra titulada "Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence" de Annick Lesnes y de Michel Laguës. Lesnes es investigadora del Laboratorio de Física Teórica de la Universidad de París VI y Laguës es profesor de Física en la Escuela Superior de Física y Químicas Industriales de París.

Los autores comienzan introduciendo diversas nociones que utilizaremos a lo largo de esta sección. En este sentido dicen "Introducimos y desarrollamos más el concepto de invariancia de escala (…) Nada importante se modifica en la física del estado crítico si cambiamos la escala de observación (…) Por ejemplo, a medida que disminuimos el aumento de un microscopio imaginario, tan pronto como ya no vemos los detalles microscópicos, la imagen del sistema físico permanece

[15] Formalización en el sentido lógico general, es decir, expreso, preciso y determinado. Por supuesto, esto no es equivalente a la formalidad de la Lógica Formal, que lleva al extremo el pensamiento dicotómico

estadísticamente igual. Esta propiedad de la invariancia de escala del estado crítico fue destacada y utilizada en la década de 1960 por Kadanoff, quien tuvo la intuición de que esta sería la clave para una descripción eficaz de los fenómenos críticos. De hecho, en 1970 varios físicos, en particular Wilson, propusieron una serie de métodos denominados "grupo de renormalización" que permitían el cálculo de conductas críticas extrayendo las consecuencias físicas de la invariancia de escala (…) Una de estas consecuencias es que las conductas críticas no dependen en gran medida en detalles físicos microscópicos que se "promedian" a gran escala. Sin embargo, dependen en gran medida de las características geométricas del sistema: la dimensión espacial y el número n de componentes del parámetro de orden." (Lesne & Laguës, Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence, 2012, págs. 30-31).

Así, afirman que "Esta invariancia se manifiesta de una manera directamente observable por la aparición de estructuras espaciales sin escalas de longitud características (…) muchos otros objetos invariantes de escala, que son auto-similares en que el detalle ampliado es indistinguible del objeto observado como un todo. Los ejemplos incluyen, entre otros, trayectorias de partículas que realizan movimiento browniano, conformaciones de polímeros lineales, copos de nieve, chispas, fracturas, superficies rugosas, grupos de percolación, pulmones, cuencas de drenaje geográficas, vasos sanguíneos, neuronas, colonias bacterianas y atractores extraños. Veremos que la presencia de estructuras auto-similares, bautizadas como fractales por Mandelbrot [7, 8], es la firma espacial de los fenómenos, que refleja la divergencia de la longitud de correlación y se acompaña de leyes de escala para diferentes observables del sistema." (Lesne & Laguës, Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence, 2012, págs. 43-44).

Como explica (Valdebenito, 2019, pág. 1), "Un fractal es un objeto geométrico en el que se repite el mismo patrón a diferentes escalas y con diferente orientación. Los fractales tienen una estructura geométrica recursiva. La expresión fractal viene del latín fractus, que significa fracturado, roto, irregular. La expresión y el concepto se atribuyen al matemático Benoit Mandelbrot (Mandelbrot 1977 y 1982). Dentro de la geometría fractal podemos distinguir dos tipos de fractales: (…) Fractales regulares: Objetos construidos a partir de copias exactas (escalas) de sí mismos (…) Fractales no regulares: Objetos auto-semejantes, pero que no están construidos sólo a partir de copias exactas de sí mismos.”

A continuación, se presentan algunas figuras geométricas de tipo fractal que están relacionadas a determinadas propiedades matemáticas importantes a nivel matemático y meta-matemático:

Figura 12

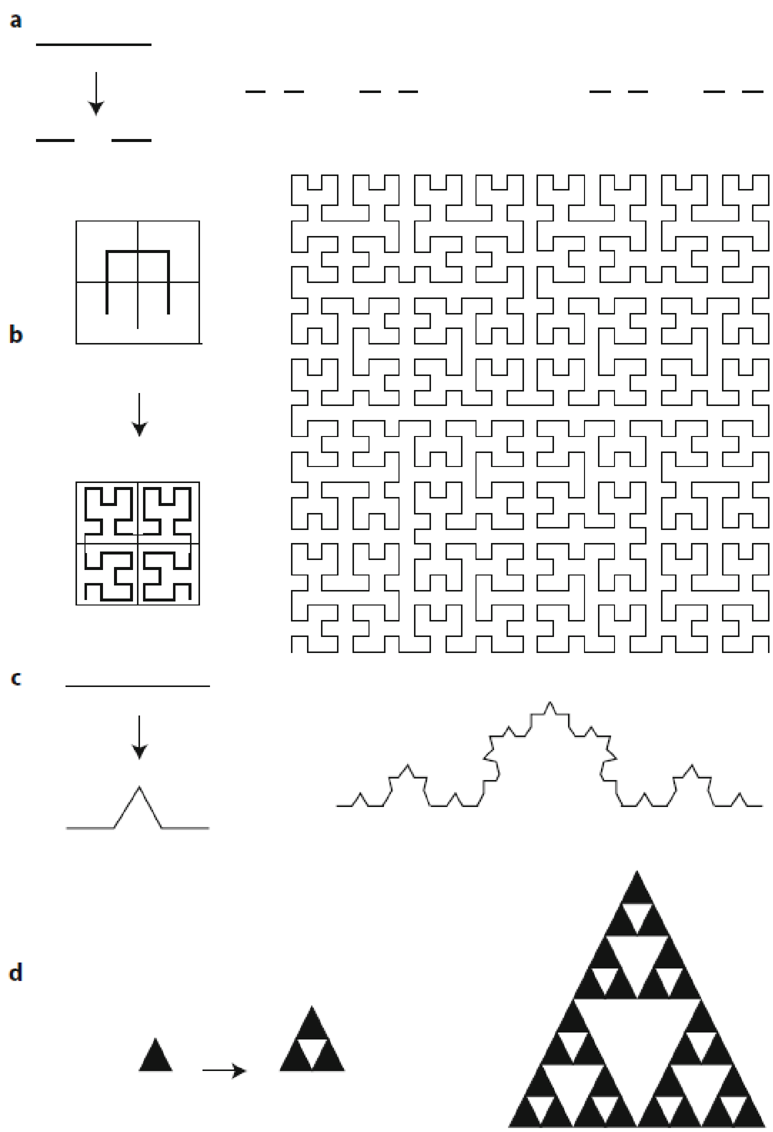


Fig. 2.1 Some famous mathematical fractals: (**a**) Cantor set [1], is an uncountable but null measure set; its fractal dimension is $d_f = \log 2/\log 3 < 1$. (**b**) Hilbert curve [5], is a space-filling curve; its fractal dimension is $d_f = 2$; (**c**) Koch curve [6], is continuous everywhere but differentiable nowhere; its fractal dimension is $d_f = \log 4/\log 3 > 1$; (**d**) Sierpinski gasket (also known as Sierpinski triangle or sieve) [10], is a set in which each point is a branch point (where the edges of two triangles meet); its fractal dimension is $d_f = \log 3/\log 2 < 2$. The figure shows the algorithm generator on the *left* and the resulting construction after three iterations on the *right*. The reader can imagine extrapolating the resulting diagram obtained ad infinitum

Fuente: (Lesne & Laguës, Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence, 2012, pág. 44).

Sobre las figuras descritas anteriormente, plantean que “Las estructuras matemáticas que se muestran en la figura 2.1 se utilizan hoy en día para definir los conceptos esenciales de la geometría fractal, que aplicamos (en un sentido restringido y estadístico) a algunas estructuras naturales, a continuación. Los algoritmos de construcción de estas estructuras matemáticas muestran su auto-similitud (…) Las estructuras fractales se desvían de la geometría euclidiana porque son auto-similares: un detalle ampliado es similar a toda la estructura. En particular, las estructuras fractales tienen detalles en todas las escalas de longitud. Como consecuencia, las mediciones que hacemos dependen de la escala a la que observamos.” (Lesne & Laguës, Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence, 2012, pág. 45).

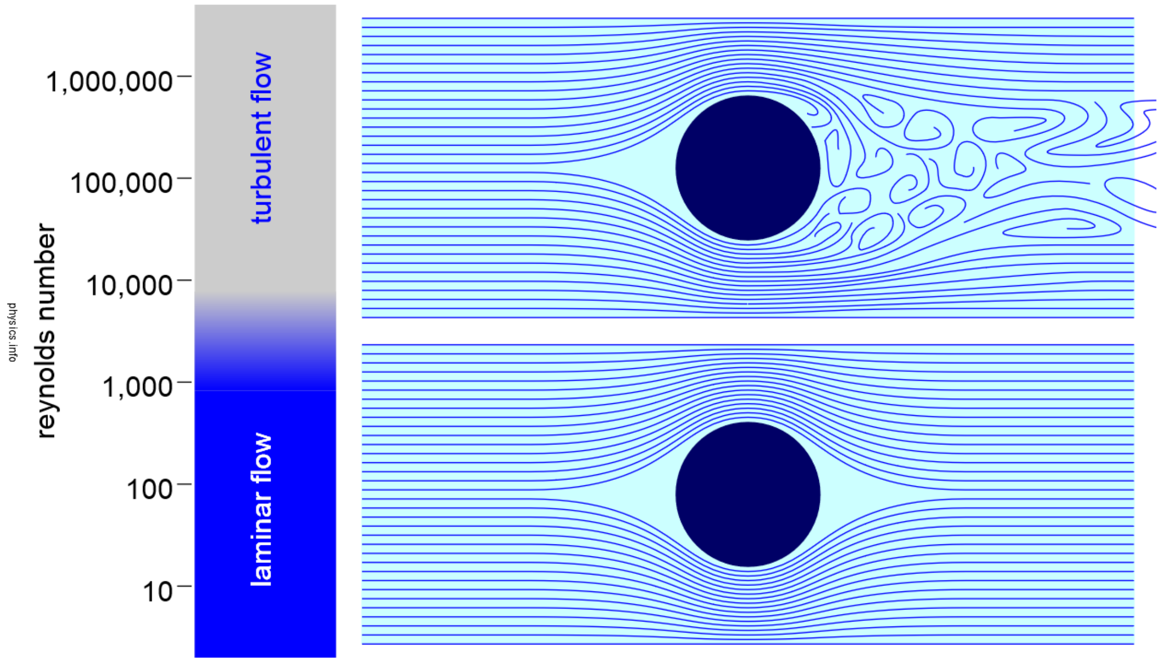
Lo anterior puede comprenderse en términos de las ciencias aplicadas como que un objeto de la realidad, aunque mantiene a cualquier escala y dirección (dentro del sistema de coordenadas que sea) su esencia, aunque esta se manifiesta de formas diferentes según la escala en que se analice el objeto y la dirección de su magnitud, por lo que las mediciones a realizar del fenómeno deberán ser diseñadas y realizadas tomando en cuenta la escala del fenómeno y la dirección de su magnitud. Sin embargo, la complejidad de los fenómenos fractales implica que, en caso no se cumpla la consideración anterior, no se podrá verificar formalmente la auto-similaridad de la totalidad respecto a sus partes integrantes debido a los detalles necesarios a medir y estudiar para poder confirmar la auto-similaridad en cuestión.

Los fenómenos críticos que describen Lesne y Lagües, que están claramente asociados a fenómenos que desde la Teoría del Caos pueden ser descritos como sistemas complejos, son a nivel lógico-formal aquellos fenómenos de la Naturaleza y la sociedad que muestran un comportamiento descrito matemáticamente por sus puntos críticos (máximos y mínimos, según el fenómeno estudiado y la metodología mediante la cual se aborde su estudio). Filosóficamente hablando, estos fenómenos se definen por determinadas características inherentes a su esencia. De hecho, pueden verse como un caso particular de los fenómenos complejos (los que se modelan mediante el uso de sistemas complejos) y de ellos extraer características generales que se corresponden también con los sistemas complejos, omitiendo las que no sea posible generalizar filosóficamente por determinadas características concretas de las Ciencias Físicas.

Los fenómenos de la realidad conocidos como “fenómenos críticos” relativos a sistemas dinámicos pueden verse como una forma más compleja de los llamados fenómenos aleatorios, sobre los cuales algunos bayesianos, como (Jaynes, 2003, pág. 709), afirman que no han sido bien-definidos y siguen sin ser identificados en la Naturaleza; esta afirmación se probará como falsa en la última sección de esta investigación y se procurará mostrar la conexión entre “fenómenos aleatorios”, “fenómenos críticos” y “fenómenos complejos” (aquellos modelados mediante sistemas complejos). Así, como señala (Lesne & Laguës, Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence, 2012, pág. v), la génesis del interés por estudiar lo que actualmente se denomina como “fenómenos críticos” se encuentra en el estudio del comportamiento de los fluidos alrededor del punto crítico hace más de 100 años, mientras que como señala (Kessler & Greenkorn, 1999, pág. 314), “En flujo laminar, las partículas de fluido se mueven en trayectorias suaves. Es importante reconocer que la “partícula” de fluido no se refiere a una molécula de fluido. Más bien, por "partícula" de fluido nos referimos a alguna región identificable en el fluido que se está moviendo como una unidad en ese momento. Si la velocidad relativa de las capas de fluido se vuelve lo suficientemente alta, las capas pierden identidad y el fluido se "da vueltas". El momento se transfiere no solo por el mecanismo que se observa en el flujo laminar donde las moléculas saltan de regiones de una velocidad a regiones de diferente velocidad, sino también por grupos considerables de fluido que poseen la velocidad de una región dada que se mueve de esa región a una región de diferente velocidad. Este tipo de flujo se llama turbulento. El flujo turbulento no es fácil de describir en detalle y, por lo tanto, generalmente debemos recurrir a teorías experimentales y estadísticas para describir dicho flujo.”

A continuación, se presentan de manera visual las diferencias entre un fluido no turbulento y un fluido turbulento, la cual permite también hacerse una idea de por qué las mediciones de este tipo de fluidos se complejizan:

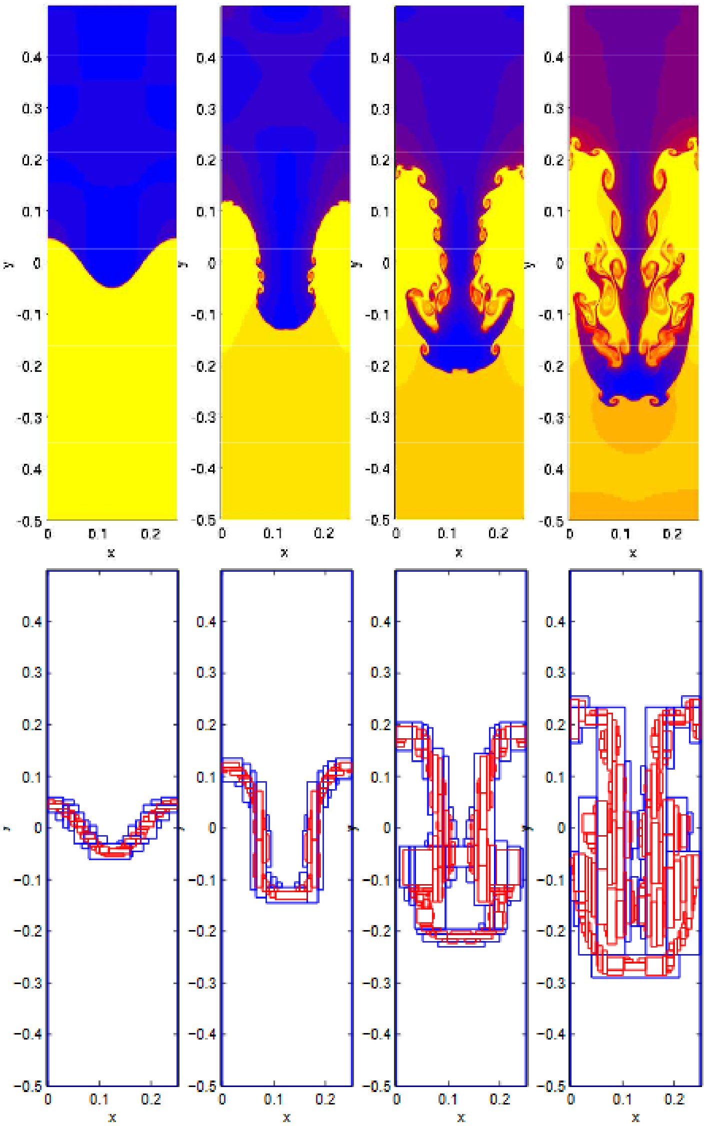
Figura 13



Fuente: (Elert, 2020).

Por otro lado, incluso puede encontrarse complejidad en el simple hecho de mezclar agua y aceite dentro del campo gravitatorio de nuestro planeta, es decir, el fenómeno de mezclar agua y aceite observados diariamente. A este fenómeno le conoce como "Inestabilidad de Rayleigh-Taylor" y, tal como aparece en la investigación de Li & Li en el Laboratorio Nacional de Los Álamos, se observa empíricamente (definiendo numéricamente determinados parámetros) para el caso de sistemas hidrodinámicos y magneto-hidrodinámicos como se muestra a continuación:

Figura 14



Fuente: (Li & Li, 2006, pág. 1).

Lo que en términos simples buscan expresar (Kessler & Greenkorn, 1999) en la referenciada anterior es que la "Hipótesis del Medio Continuo" sólo es válida para la física clásica. Esta hipótesis está fundamentada en un concepto teórico que justifica la mayoría de los análisis empíricos realizados sobre fluidos, fundamentalmente los relacionados con la Mecánica de Fluidos Computacional. La "Hipótesis del Medio Continuo" busca capturar la noción de fluido como un fenómeno de la realidad cuya naturaleza es esencialmente continua, pero que experimenta discreciones o rupturas en su estructura en función del modelo de partículas bajo el cual se analice tal fluido. Esta abstracción conceptualiza la noción de "Elemento Representativo del Volumen" ("REV" –Representativa Element of Volume–). El REV es un elemento de dimensiones microscópicas (micro o nano) que representa alguna propiedad física o cantidad de la variable analizada y que mantiene un valor medio, que puede ser reproducido en condiciones controladas (experimentos de laboratorio), manteniéndose constantes todos los requerimientos externos al fluido y otros factores que puedan ser considerados. Por tanto, una partícula REV es el volumen más pequeño en el que se mantienen las propiedades esenciales del fluido. Vale la pena mencionar que los fluidos se analizan en el marco de los sistemas dinámicos porque se concibe que las moléculas de un medio continuo vibran constantemente y que esta vibración sólo cesa al alcanzarse el cero absoluto porque como sabemos, es ahí en donde según la física clásica cesa de forma absoluta todo movimiento atómico. Así, puede verse esta hipótesis como una que busca hacer omisión de los "huecos" que pueden existir entre las moléculas de los fluidos y a nivel de la estructura individual de las moléculas. Bajo esta hipótesis, las propiedades macroscópicas (las observadas, medibles) del fluido se consideran bien-definidas en elementos de volumen de dimensiones infinitesimalmente pequeñas construidas en términos de la escala de la "longitud característica" del sistema (la cual se definió anteriormente), pero tal escala puede considerarse "grande" en comparación con la escala de longitud molecular. Las propiedades moleculares de los fluidos pueden variar continuamente de un REV a otro y expresan las esperanzas matemáticas o valores medios de las propiedades (moleculares) del fluido analizado. Como señalan los autores, la hipótesis del medio continuo puede conducir a resultados inexactos en aplicaciones relativas a flujos de velocidad supersónica o flujos moleculares a nano-escala. Los problemas para los que la hipótesis del continuo no ofrece la suficiente robustez analítica y predictiva, son precisamente los que pueden resolverse mediante la Mecánica Estadística. Intuitivamente hablando, esto ocurre por el incremento en el nivel de complejidad del sistema cuando, por ejemplo, “(…) la velocidad relativa de las capas de fluido se vuelve lo suficientemente alta, las capas pierden identidad y el fluido se "da vueltas".” (Kessler & Greenkorn, 1999, pág. 314).

Profundizar en lo planteado por Kessler y Greenkorn tuvo como objetivo mostrar los orígenes históricos de los fenómenos críticos y las ramas de la ciencia en las que aparecen, así como las razones filosóficas por las que aparecen en la Naturaleza y las razones empíricas concretas por las que se presentan en tales ramas de la ciencia. Una descripción sintética sobre el estado actual desarrollo teórico del concepto “fenómeno crítico” puede encontrarse en (Halperin, 2019). Según Bert Halperin, profesor de la cátedra Hollis de Matemática y Filosofía Natural de la Universidad de Harvard, lo anterior tiene que ver con lo que los físicos modernos denominan “Teoría de Fenómenos Críticos Dinámicos”. El autor plantea que los nuevos abordajes matemáticos de la realidad han permitido entender el magnetismo, los superfluidos y otros sistemas complejos. En nuestra opinión, a nivel cualitativo los fenómenos estocásticos son una versión laxa de los fenómenos críticos y los fenómenos críticos son un caso particular de los fenómenos complejos, i.e., los fenómenos críticos pertenecen a la clase de fenómenos que aquí denominamos “fenómenos complejos”, en relación a que son fenómenos de la Naturaleza con el suficiente grado de complejidad para tener que ser modelados mediante los sistemas complejos.

En la investigación referida, Halperin señala elementos que pertenecen a sus estructuras matemáticas y que permiten modelarlos en tales términos. En tal sentido, consolidándolo con lo planteado en (Lesne & Laguës, Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence, 2012) y (Lesne, Renormalization Methods. Critical Phenomena, Chaos, Fractal Structures, 1998, págs. 1-2), se pueden enlistar las siguientes características de los fenómenos críticos, que pueden ser concebidas a su vez como características fundamentales generales a los sistemas complejos: leyes de escalamiento, propiedades críticas que aparecen con claridad únicamente en los umbrales (relacionadas a los llamados “exponentes críticos” y la divergencia exponencial, por eso también se les conoce como "fenómenos críticos"), universalidad de sus propiedades críticas, estructura re-normalizable, comportamiento fractal y ruptura de ergodicidad.

A continuación, se procederá a realizar una interpretación dialéctica de todas estas características que, en primera instancia, parecen ser dominio solamente de la Matemática Pura y la Lógica Formal.

III.II. Invariancia Escalar y/o Auto-Similaridad

Existen, al menos de manera general, relaciones de escalamiento entre las partes de una totalidad y existe también una relación de escalamiento entre la totalidad y sus partes integrantes. Las relaciones de escalamiento, tal y como son planteadas en (Lesne & Laguës, Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence, 2012) en los lugares referidos, omiten cierta sutileza matemática que, en vistas de lo discutido en relación a la teoría de conjuntos, es fundamental para una comprensión dialéctica sobre los sistemas complejos. En la obra referida se plantean como sinónimos la invarianza escalar con la auto-similaridad y prueba de ello es que la sección 2.1.3 se titula "Self-Similarity (or Scale Invariance)" y de las referencias realizadas a la obra previas a este párrafo puede desprenderse que efectivamente el título de la sección no es engañoso. Sin embargo, tal afirmación no es necesariamente cierto y definitivamente no es cierta a nivel lógico-formal, al menos no desde la teoría axiomática de conjuntos de ZFC (que es la matemática generalmente utilizada a nivel de demostraciones que busquen basarse en lo que se conoce como una teoría de conjnutos bien-fundada –con el fin de ser lo más axiomáticas posible– y la que sirve de referencia a todo desarrollo basado en la lógica formal) y desde muchos otros de sus derivados tampoco. Una transformación (sea entre funciones, entre espacios topológicos o entre funciones que van de un espacio topológico a otro) posee invarianza escalar o auto-similaridad cuando lo que se ha definido como invarianza escalar ocurre en tiempo continuo o en tiempo discreto, respectivamente. El concepto de fractalidad involucra la auto-similaridad (la cual ocurre de forma discreta), y los sistemas complejos (fundamentalmente la noción de complejidad) están íntimamente relacionados con la fractalidad (como puede corroborarse mediante la presentación de diversos estudios científicos que hemos hecho en esta investigación), invocando con ello la noción de tiempo discreto o, en su defecto, la noción de una descripción fragmentada del estado del sistema o del estado de una de las partes integrantes del sistema (implícitamente, en algún momento del espacio-tiempo). Esta noción, según el escenario científico en el que se localice, puede expresar de forma más profunda la incompletitud del conocimiento humano debido a problemas asociados a las mediciones y al estado de conocimiento de la humanidad respecto a tal o cual aspecto de la realidad y sobre la realidad en general, que están íntimamente ligados con la incapacidad que poseen los seres finitos de aprehender de forma absoluta la realidad (y que por antonomasia están ligados a la noción de complejidad, en cualquier forma –discreta o continua-); esto puede imaginarse como la situación en que no se cuenta con la información necesaria (calidad) y suficiente (cantidad) para modelar un fenómeno mediante ecuaciones diferenciales (que es una modelación continua), e incluso mediante distribuciones de probabilidad continuas debido a tal o cual marco teórico de referencia según la rama de la ciencia de la que se trate u otro factor causante.

Así, que invarianza escalar sea igual o no a auto-similaridad no es algo que pueda establecerse en abstracto, es precisamente uno de los elementos analíticos que sólo puede definirse en concreto (puesto que ni siquiera lógico-formalmente son lo mismo y está claro por lo planteado anteriormente el vacío que existe entre lo discreto y lo continuo en la Teoría Axiomática de conjuntos, expresado en la necesidad de asumir como cierta la "Hipótesis del Continuo" por la incapacidad del sistema axiomático lógico–formal de auto demostrar su veracidad o falsedad –dado que ZFC ni siquiera puede verificar su propia veracidad o falsedad de forma axiomática–). Son precisamente todos estos "grados de libertad lógicos" los que permiten un abordaje holista de la realidad en su complejidad. Esto es así, debido a que la auto-similaridad puede verse, planteado lo anterior, no sólo como idéntica (iguales) o equivalente (iguales aunque cada una en su temporalidad) a la invarianza escalar, sino que también puede interpretarse como una versión laxa de la invarianza escalar, es decir, una invarianza escalar cuyo cumplimiento puede ser verificado para una cantidad discreta de partes y no en su continuidad, en toda su extensión o dominio. Esto expresa la noción de que para la totalidad de estados que componen el sistema complejo de referencia existirá un "margen de imprecisión" en la manera en que cada coordenada del sistema nos brinda la información que describe determinado aspecto del fenómeno estudiado (respecto a la información óptima o efectivamente veraz), es decir, describe determinado aspecto del estado del objeto o sistema); sin embargo, lo que amplía aún más las posibilidades analíticas (que ya se definieron distintas de las probabilidades) es que también puede ocurrir que una coordenada no solamente exprese una pieza de información de un determinado estado del objeto o sistema, sino más de 1, e puede incluir contrarios; nótese que esta incertidumbre implica automáticamente las probabilidades y, además, el "margen de imprecisión" aludido anteriormente es una invocación no-enmascarada a la "desviación estándar". No estamos en desacuerdo con que invarianza escalar y auto-similaridad puedan ser vistos de forma idéntica o equivalente, sino en que eso no agota las posibilidades, no agota "Lo Universal Abstracto".

III.III. Leyes de Divergencia Exponencial

Sea la divergencia exponencial una aproximación matemática limitada al concepto dialéctico de "contradicción antagónica". Entonces, es posible describir cuantitativamente (mediante determinadas estructuras matemáticas denominadas lógico–formalmente como *Leyes de Potencias* –las cuales no son más que funciones exponenciales o alguna generalización de estas–) la contradicción de la naturaleza señalada a través de la cuantificación del alejamiento de sus variables involucradas usando los números reales o alguna de sus generalizaciones.

III.IV. Exponentes Críticos

Existen leyes fundamentales que describen y explican de forma general las contradicciones antagónicas entre las variables involucradas.

III.V. Universalidad

Matemáticamente hablando, la universalidad es el conjunto de propiedades que son independientes de la escala en que se analice el sistema. El concepto de universalidad proviene de la noción de que cuando la suficiente cantidad de partes de la totalidad se toman en consideración, las características estructurales del sistema pueden ser descritas por un conjunto finito de parámetros. Por ejemplo, lo anterior a nivel de la Estadística para el caso de las distribuciones de probabilidad se expresa en sus parámetros de forma, escala y localización tomando en consideración un tamaño de la muestra adecuado (y esto último se define según cada distribución estudiada). Esto permite introducir una apreciación adicional y es el concepto de largo plazo. Filosóficamente hablando, la noción de "muestra lo suficientemente grande" hace noción a un tiempo y/o espacio extendido, que en su forma espacio-tiempo podemos definir como lo que cotidianamente entendemos por largo plazo (cómo cuantifiquemos y por qué la cualidad "largo" es otra discusión para otra investigación, pero variará según el fenómeno de estudio y otros aspectos a considerar por el investigador). Entonces, la verificación de la universalidad sólo puede realizarse estudiando un sistema o fenómeno de la realidad a largo plazo, puesto que en caso contrario una descripción del sistema para un corto período de tiempo utilizando de forma ordinaria (usual) el marco teórico-metodológico de la ciencia en cuestión (diseñado a largo plazo) conducirá a errores en las mediciones y en el análisis de esas mediciones. Esta es precisamente la lógica que la Distribución t de Student sigue respecto a la Distribución Normal. Esto no significa que a corto plazo se viole la universalidad, sino que a corto plazo el sistema no manifestará de forma acabada su esencia, por lo que a la descripción normal u ordinaria del sistema hay que realizarle determinados ajustes que variarán según el fenómeno de estudio y del plazo en que se estudie que responden a determinadas consideraciones de la misma índole (del tipo y plazo mencionados) y estas variaciones demandan en sí mismas investigaciones profundas que sirven como complementos teóricos al paradigma científico actual y gradualmente conducen a su transformación progresiva o radical, según la manera en que la comunidad científica pertinente asimile las nuevas investigaciones sobre estos campos (lo que a su vez depende de condiciones históricas externas e internas a la comunidad científica, así como de aspectos humanos y características de la comunidad científica en general invariantes –lo cual no es objeto de esta investigación y pertenece a las disciplinas que estudian y determinan el papel de las creencias del investigador en la Filosofía y en las Ciencias–).

III.VI. Fractalidad

Matemáticamente hablando, esto implica que el estado de un objeto dentro de un sistema debe ser descrito con diversas propiedades que brindarán información incompleta sobre la o las características del estado que con tales propiedades es descrito. Esta es la intuición detrás del concepto de "Dimensión Fractal" o "Dimensión de Hausdorff". Esto significa también que la arquitectura de los instrumentos de medición debe permitir tanto firmeza como flexibilidad respecto a la aplicación de la "Ley del Tercero Excluido".

III.VII. Estructura Re-Normalizable

Evidentemente, el comportamiento crítico de los fenómenos es diferente al comportamiento que tales fenómenos poseen cuando no se encuentran en el vecindario de sus puntos críticos. Por ello, cuando no se encuentran en dicho vecindario, se estudian bajo la óptica de la conocida "aproximación de campo medio" perteneciente a Teoría de Campo Medio. En esta teoría, se estudia el comportamiento de fenómenos estocásticos que naturalmente poseen una elevada cantidad de grados de libertad mediante el estudio de un modelo más simple (con menos grados de libertad), el cual se puede aproximar al modelo complejo (el original, el observado en la Naturaleza) utilizando un promedio de los grados de libertad de ambos. La Teoría del Campo Medio es válida fuera de la transición de fase, puesto que omite analíticamente las correlaciones entre los elementos del sistema, que se vuelven cada vez más importantes a medida que el sistema se acerca al punto crítico donde la longitud de la correlación entre sus elementos diverge. Muchas propiedades del comportamiento crítico de un sistema pueden derivarse en el marco del grupo de renormalización. Esto en alguna medida recuerda a lo que señala Landau "A primera vista se podría concluir de aquí que al aumentar el número de partículas deben crecer de manera inimaginable la complejidad y el embrollamiento de las propiedades de un sistema mecánico, y que en el comportamiento de un cuerpo macroscópico no podemos ni tan solo trazas de regularidad. Sin embargo, esto no es así y veremos en lo que sigue que al aumentar el número de partículas se manifiestan nuevas leyes de un carácter peculiar. Estas leyes –las llamadas *leyes estadísticas*–, que vienen precisamente determinadas por el hecho de que el número de partículas que componen el cuerpo es grande, en modo alguno se pueden reducir a leyes puramente mecánicas (…) De esta manera, aunque el movimiento de los sistemas con un gran número de grados de libertad obedece a las mismas leyes mecánicas que el movimiento de un sistema constituido por un pequeño número de partículas, el hecho de que el número de grados de libertad sea grande conduce a leyes cualitativamente diferentes." (Landau, 1994, págs. 1-2). Siguiendo esta misma lógica al analizar fenómenos críticos, aunque su operativización resulta distinta, aparece el concepto de "grupos de renormalización".

Como señala (Lesne, Renormalization Methods. Critical Phenomena, Chaos, Fractal Structures, 1998, págs. 19-20), existen 3 significados posibles para el término "renormalización":

1) Una operación matemática consistente en transformaciones de escala, diseñada para ser iterativa y reducir las divergencias críticas y obtener las leyes (fórmulas) de escalamiento matemático de los fenómenos críticos.
2) Como adjetivo que implica una "racionalización" o reducción a la escala de referencia. Este tipo de normalización ocurre frecuentemente en modelos hidrodinámicos y es importante para las simulaciones experimentales o numéricas sobre modelos de escala, simplemente asumiendo el hecho de que el sistema posee invarianza escalar y que sus propiedades fundamentales dependen de sus características (volumen, viscosidad, densidad, usualmente también velocidad, etc.) únicamente por intermediación de magnitudes adimensionales (sin dimensión).
3) El adjetivo utilizado para decir "efectivo" o "aparente", lo que cualifica un coeficiente o cantidad obtenida en un sistema S mediante la adición a su valor actual de una contribución (en las mismas unidades de medida o dimensiones) de fenómenos que provienen dentro del sistema S o de interacciones entre S y su medio ambiente o entorno. Esta es la concepción bajo la cual se entiende la "renormalización de la masa del electrón" en Mecánica Clásica. Además, esta es también la concepción bajo la cual la Mecánica Cuántica acuña el concepto de "Grupos de Renormalización". En la Mecánica Cuántica, invarianza escalar es igual a auto-similaridad, aunque a nivel formal no necesariamente lo son (una aplica para tiempo discreto y otra para tiempo continuo) y en nuestra interpretación dialéctica tampoco lo son necesariamente.

La autora utiliza en su obra el término "renormalización" su sentido 1), sin embargo, en esta investigación se hace referencia a "renormalización" en los 3 sentidos. Explicando en detalle la afirmación anterior, por un lado, como una transformación iterativa de escala que busca reducir divergencias críticas que generan ideas sobre los fenómenos que en general no son lo suficientemente informativas o la información que brindan no es lo suficientemente significativa, puesto que esconde debajo de la apariencia las leyes fundamentales que rigen los fenómenos de la realidad natural y social; por otro lado, también son un re-escalamiento y hasta estandarización de las variables de un sistema de referencia determinado mediante su ligamiento a una magnitud de referencia determinada. Finalmente, también en el sentido de que este proceso de re-normalización tiene que ver con la re-estructuración del sistema alrededor de determinadas magnitudes, por lo que la existencia de coeficientes obtenidos en un sistema S mediante la adición a su valor actual de una contribución de los elementos que conforman el vecindario matemático del elemento en cuestión (que en la Mecánica Clásica es el electrón) es posible; esta última noción implica una clase de técnicas usadas para obtener términos finitos o convergentes en un desarrollo perturbativo (que posee las implicaciones antes descritas sobre perturbación a nivel de fluidos); estos "desarrollos perturbativos" pueden entenderse como evoluciones del fenómeno de estudio que devienen en su complejización progresiva.

III.VIII. Ruptura de Ergodicidad

Comencemos por definir a nivel lógico-matemático la "ergodicidad". El concepto matemático de ergodicidad simplemente busca expresar en términos abstractos (más generales desde la Lógica Formal) el concepto de ergodicidad tomado de la Física Teórica. Ahí, aparece un concepto fundamental conocido como el "Postulado Fundamental de la Mecánica Estadística" y este plantea que todos los estados que el sistema pueda alcanzar, tienen igual probabilidad de ser alcanzados. En otros términos, esto quiere decir que todas las descripciones que puedan realizarse en el tiempo sobre el sistema son igualmente verosímiles. Como se explica en (Princeton University, 2019, pág. 55), "Esta expresión fue encontrada por Ludwig Boltzmann, y tiene un papel tan importante que hemos decidido llamarlo el postulado fundamental de la mecánica estadística. Dado que estamos tratando con un postulado, no se puede probar; sin embargo, podemos hacerlo plausible mostrando que las propiedades de la entropía que se derivan de él concuerdan con las propiedades que postulamos en termodinámica." El postulado a nivel de intuición física implica que para un sistema cerrado (que no puede interactuar con su exterior) con energía y composición conocidas (por ejemplo, la posición exacta y los momentos de cada partícula en el micro-estado), cualquier micro-estado consistente con una misma cantidad de energía y la misma composición tiene igual probabilidad de ser alcanzado que otro. Esta idea descrita intuitivamente en términos estadísticos puede verse como la descripción de un fenómeno aleatorio para el cual el promedio de tiempo de una secuencia de eventos es el mismo que el promedio del conjunto. Formalmente (expresado lo anterior en el teorema de Birkhoff), la ergodicidad de un "espacio" cualquiera (para nuestro caso, un espacio de probabilidad) consiste en que el "tiempo" promedio es igual al espacio promedio, lo que permite asignar a los objetos que se desplazan en el "tiempo" a través de tal "espacio" (de probabilidad) la misma probabilidad de ocurrencia. Las comillas obedecen a que "tiempo" en realidad hace alusión a una variable de referencia que crece de forma infinita y hasta transfinita, mientras que "espacio" hace simplemente referencia a una estructura en donde ocurre el fenómeno estudiado.

Sin embargo, en los sistemas complejos debido precisamente a su complejidad intrínseca y otros aspectos relacionados (como la falta de información sobre los mismos) la ergodicidad no está garantizada y al analizar el sistema pueden presentarse puntos de ruptura o simplemente el sistema no ser ergódico en términos estructurales. Un ejemplo de esto puede encontrarse en la lógica bajo la cual un econometrista es conducido a incluir en su modelo, con la finalidad de alcanzar robustez estructural en el mismo, las denominadas "variables dummy". Esto significa en términos intuitivos, si concebimos el espacio de probabilidad como la esfera metálica descrita previamente como nuestro espacio de probabilidad, que las probabilidades de meter la mano en la esfera y extraer alguno de sus i–ésimos elementos es uniforme y esta intuición es precisamente lo que permite expresar la

“Ley de los Grandes Números” como un caso particular del “Teorema de Birkhoff”). “Ley de los Grandes Números” es la clase mediante la cual agrupamos a todos los teoremas que sirven para describir el comportamiento del promedio de una sucesión de variables aleatorias conforme el número de ensayos tiende a infinito en ausencia de error sistemático. Los teoremas en cuestión detallan las condiciones requeridas para garantizar unívocamente que este comportamiento promedio converja al promedio de las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias que conforman la sucesión, es decir, para garantizar que el comportamiento promedio de la sucesión sea igual al comportamiento promedio de las variables aleatorias que conforman tal sucesión.

Aquí se logra captar de forma pura la intuición detrás tanto del Teorema de Birkhoff como de la Ley de los Grandes Números: para que el todo sea una combinación lineal de las partes, que en “Layman’s english” sería que el todo es igual a la suma de las partes. Es precisamente esta visión filosófica de la realidad, heredada directamente de la Ley del Tercero Excluido, es que la Lógica Dialéctica rompe como sistema lógico y es el que la Teoría del Caos y la Complejidad como ciencia confirman como falsa en términos de la realidad objetiva. La hipótesis de ergodicidad es asumida usualmente en el análisis estadístico realizado por la Física Computacional.

Lo anterior no implica en lo absoluto que no estemos de acuerdo con la aceptación flexibilizada de la hipótesis de ergodicidad, que en el fondo junto con el Postulado Fundamental de la Mecánica Estadística y el Postulado Fundamental de la Mecánica Continua (que es la Hipótesis del Medio Continuo) están íntimamente ligados a la Hipótesis del Continuo de Cantor, tanto teóricamente como en el sentido de la imposibilidad de demostrar axiomáticamente la realidad como continuidad, la imposibilidad de aprehender Lo Universal Abstracto, la imposibilidad de que seres finitos aprehendan absolutamente el infinito, la imposibilidad de una de las partes para determinar la totalidad y la imposibilidad de una criatura de comprender a su creador (visto desde el punto de vista teológico), según el punto de vista del cual se quiera ver, existe lo que un matemático llamaría "convergencia uniforme", metafóricamente hablando. Nuestra crítica solamente radica en que lo que en el fondo se persigue con la hipótesis de ergodicidad puede obtenerse de manera distinta.

La deseabilidad de la ergodicidad es una de las consecuencias que pueden desprenderse de lo que se conoce como "independencia estocástica". Para comprender lo que en realidad está detrás de la independencia estocástica es necesario buscar respuestas en la obra que John Nelder (padre de los modelos lineales generalizados) escribe junto con Peter McCullagah, un texto académico y pedagógico fundamental en la historia de la Estadística, que fue galardonado con el prestigioso Premio Karl Pearson otorgado por el International Institute of Statistics. Ahí, los autores señalan que "(…) implica que todas las observaciones se realizan en la misma escala física y sugieren que las observaciones son independientes, o al menos que en algún sentido son intercambiables, lo que justifica un tratamiento imparcial de los componentes." (McCullagah & Nelder, 1989, pág. 5). De lo anterior se pueden extraer conclusiones sumamente valiosas. En primer lugar, que equivalencia dimensional es fundamental en la inferencia estadística y representa la base de todo tratamiento teórico y empírico de las variables. En segundo lugar, que detrás del deseo de independencia entre las variables aleatorias está en realidad un anhelo más general: que las variables u observaciones sean intercambiables en algún sentido.

De lo segundo se desprende una pregunta, ¿por qué es deseable que las variables sean intercambiables de alguna manera?, y su respuesta es por la misma finalidad de las matemáticas. Para explicar el punto anterior, basta analizar a qué se referían McCullagah y Nelder cuando hablaban de "intercambiabilidad en algún sentido":

$$S_1(y, \hat{y}) = \sum |y_i - \hat{y}_i| \qquad (1)$$

$$S_\infty(y, \hat{y}) = \max_i |y_i - \hat{y}_i| \qquad (2)$$

La ecuación (1) es para el caso de los Espacios $L_1 - Normados$ y la ecuación (2) es para Espacios $L_p - Normados$, más allá la potencia p (que denota la integrabilidad de las funciones que sirven como métrica en el Espacio de Medida L), la intuición siempre es la misma: ambas representan la distancia de una observación respecto a una magnitud de referencia (en este caso el promedio aritmético) para cuantificar el grado de incertidumbre dentro del sistema analizado.

De la forma matemática de las dos identidades anteriores se desprende la razón de por qué es deseable la intercambiabilidad, que nosotros denotaremos de ahora en adelante como "intercambiabilidad estocástica". Para poder generalizar las conclusiones realizadas respecto a una observación perteneciente a una muestra o a una población (es indistinto para estos fines), es necesario que las conclusiones que podemos inferir sobre cualquiera de ellas (la $i - ésima$) puedan también inferirse de las $n - 1$ observaciones restantes dentro de la muestra o de la población. Llevado a un nivel de simpleza y simplicidad extremo, es decir, expresándolo en términos absolutamente dicotómicos, ha conducido a una cuestión que a más de alguno pudiese parecerle inadecuada en términos de un análisis complejo de la realidad: las observaciones o variables que pertenecen a la misma variable, al mismo fenómeno de estudio o al mismo conjunto de fenómenos de estudio que interactúan entre sí (estas observaciones son estados históricos parciales o totales del fenómeno estudiado y/o estados de otros fenómenos relacionados al fenómeno estudiado que explican parcial o totalmente al fenómeno estudiado) deben ser independientes de sí mismas. Incluso topológicamente están relacionadas las observaciones, viéndolas desde el punto de vista lógico matemático. Por ello, consideramos que existe la necesidad de buscar enmarcar el estudio de los fenómenos de la realidad en un contexto teórico en el que sea posible un análisis determinista sobre los mismos y considerando la inexactitud de las mediciones realizadas sobre esta realidad junto con previsiones en nuestros pronósticos respecto a la incertidumbre que de lo anterior se desprende; sin embargo, en la búsqueda de un meta-análisis científico que permita abordar la realidad con la complejidad necesaria y suficiente para comprender de forma más completa y más plena la realidad, es necesario desligarla unívocamente del concepto de ergodicidad y que este último sea un elemento de una clase de opciones más amplia.

Existen una serie de investigaciones realizadas que versan fundamentalmente sobre dos temas y el lector puede verificar en (Nabi, Diferentes abordajes para la LGN con variables dependientes, 2021) y en (Nabi, Diferentes abordajes para el TCL con variables dependientes, 2021) a saber: A) Teorema Central del Límite para Variables Dependientes, B) Ley de los Grandes Números para Variables Dependientes. El enfoque de complejidad que se busca dar en esta investigación está íntimamente ligado a los fundamentos de la Teoría del Caos (que es la forma en que se concibe formalmente la complejidad), que tiene entre sus fundadores a algunos de los que fundaron también la Teoría de las Probabilidades y también comparten una similitud equivalente a nivel de sus desarrolladores. Este hecho histórico coincide con el enfoque que aquí se ha buscado dar a la complejidad, abordada desde la intuición filosófica de Laplace, Poincaré, Kolmogórov y Lorenz y la Dialéctica Materialista-Histórica. Por tal razón, los intereses específicos de esta investigación son más relacionados al campo de la Filosofía de la Estadística y Estadística Matemática.

IV. REREFENCIAS

Aravindh, M., Venkatesan, A., & Lakshmanan, M. (2018). Strange nonchaotic attractors for computation. *Physical Review E, 97*(5), 1-10. doi:https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.052212

Barnet, W., & Chen, P. (1988). Deterministic Chaos and Fractal Atrractors as Tools for NonParametric Dynamical Econometric Inference: With An Application to the Divisa Monetary Aggregates. *Computational Mathematics and Modeling*, 275-296. Obtenido de http://www.maths.usyd.edu.au/u/gottwald/preprints/testforchaos_MPI.pdf

Bjorvand, A. (1995). *A New Approach to Intelligent Systems Theory.* The Norwegian Institute of Technology, The University of Trondheim, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science. Trondheim: The University of Trondheim. Recuperado el 15 de Abril de 2020, de https://www.anderstorvillbjorvand.com/_service/53/download/id/3378/name/19950428_project_report_fractal_logic.pdf

Elert, G. (11 de Agosto de 2020). *Flow Regimes – The Physics Hypertextbook*. Recuperado el 11 de Agosto de 2020, de https://physics.info/turbulence/

Gottwald, G., & Melbourne, I. (2016). The 0-1 Test for Chaos: A review. En U. Parlitz, E. G. Lega, R. Barrio, P. Cincotta, C. Giordano, C. Skokos, . . . J. Laskar, & C. G. Sokos (Ed.), *Chaos Detection and Predictability* (págs. 221-248). Berlin: Springer.

Halperin, B. (2019). Theory of dynamic critical phenomena. *Physics Today, 72*(2), 42-43. doi:10.1063/PT.3.4137

Jaynes, E. (2003). *Probability Theory. The Logic of Science.* Cambridge University Press: New York.

Kessler, D., & Greenkorn, R. (1999). *Momentum, Heat, and Mass Transfer Fundamentals.* New York: Marcel Denker, Inc.

Kilifarska, N., Bakmutov, V., & Melnyk, G. (2020). *The Hidden Link Between Earth's Magnetic Field and Climate.* Leiden: Elsevier.

Landau, L. (1994). *Física Teórica. Física Estadística* (Segunda ed., Vol. 5). (S. Velayos, Ed., & E. L. Vázquez, Trad.) Barcelona: Reverté, S.A.

Laplace, P.-S. (1902). *A Philosophical Essay on Probabilities* (1 ed.). (E. M. Pinto, Trad.) London: JOHN WILEY & SONS. Obtenido de http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/Colecciones/ReinaCiencias/_docs/EnsayoFilosoficoProbabilidades.pdf

Lesne, A. (1998). *Renormalization Methods. Critical Phenomena, Chaos, Fractal Structures.* Baffins Lane, Chichester, West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd.

Lesne, A., & Laguës, M. (2012). *Scale Invariance. From Phase Transitions to Turbulence* (Primera edición, traducida del francés (que cuenta con dos ediciones) ed.). New York: Springer.

Li, S., & Li, H. (2006). *Parallel AMR Code for Compressible MHD or HD Equations.* Los Alamos National Laboratory, Mathematical Modeling and Analysis. Nuevo México: Applied Mathematics and Plasma Physics. Obtenido de https://web.archive.org/web/20160303182548/http://math.lanl.gov/Research/Highlights/amrmhd.shtml

Linder, J., Kohar, V., Kia, B., Hippke, M., Learned, J., & Ditto, W. (4 de Febrero de 2015). *Strange nonchaotic stars.* Recuperado el 16 de Abril de 2020, de Nonlinear Sciences > Chaotic Dynamics: https://arxiv.org/pdf/1501.01747.pdf

Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES, 20*, 130-141.

Mandelbrot, B. (1983). *THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE.* New York: W.H. Freeman and Company.

Marxist.org. (21 de Junio de 2018). *Formal Logic and Dialectics*. Recuperado el 14 de Abril de 2020, de The Meaning of Hegel's Logic: https://www.marxists.org/reference/archive/hegel/help/mean05.htm

McCullagah, P., & Nelder, J. (1989). *Generalized Linear Models* (Segunda ed.). New York, United States of America: Chapman & Hall.

Nabi, I. (18 de Marzo de 2021). *Diferentes abordajes para el TCL con variables dependientes*. Obtenido de La Biblioteca del Pueblo | El Blog de Isadore Nabi: https://mega.nz/folder/lERCnLxD#0RP8MLIq6vEYR5GBsA7kog/folder/UYRwHZaS

Nabi, I. (18 de Marzo de 2021). *Diferentes abordajes para la LGN con variables dependientes*. Obtenido de La Biblioteca del Pueblo | El Blog de Isadore Nabi:

https://mega.nz/folder/lERCnLxD#0RP8MLIq6vEYR5GBsA7kog/folder/wVAiBTQZ

Oestreicher, C. (2007). A history of chaos theory. *Dialogues in Clinical Neuroscience, 9*(3), 279–289. Obtenido de https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3202497/pdf/DialoguesClinNeurosci-9-279.pdf

Pezard, L., & Nandrino, J. (2001). Paradigme dynamique en psychopathologie: la "Théorie du chaos", de la physique à la psychiatrie [Dynamic paradigm in psychopathology: "chaos theory", from physics to psychiatry]. *Encephale, 27*(3), 260-268. Obtenido de https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11488256/

Poincaré, H. (1908). Chance. En H. Poincaré, *Science and Method* (págs. 64-90). London: THOMAS NELSON AND SONS. Obtenido de https://www.stat.cmu.edu/~cshalizi/462/readings/Poincare.pdf

Princeton University. (30 de Septiembre de 2019). *The Fundamental Postulate* . Obtenido de http://assets.press.princeton.edu/chapters/s3_9634.pdf

ResearchGate. (3 de Mayo de 2018). *When should one use Fuzzy set theory and Rough set theory? Is there any clear-cut line of difference between them?* Recuperado el 6 de Julio de 2020, de https://www.researchgate.net/post/When_should_one_use_Fuzzy_set_theory_and_Rough_set_theory_Is_there_any_clear-cut_line_of_difference_between_them

ResearchGate. (2 de Mayo de 2020). *What is the difference between Fuzzy rough sets and Rough fuzzy sets?* Recuperado el 6 de Julio de 2020, de https://www.researchgate.net/post/What_is_the_difference_between_Fuzzy_rough_sets_and_Rough_fuzzy_sets

Rosental, M., & Iudin, P. (1971). *Diccionario Filosófico.* San Salvador: Tecolut.

Russell, K. (29 de Enero de 2014). *Hypothesis testing*. Recuperado el 15 de Abril de 2020, de Stats - Kevin Russell - University of Manitoba: http://home.cc.umanitoba.ca/~krussll/stats/hypothesis-testing.html

Sharma, V. (2003). Deterministic Chaos and Fractal Complexity in the Dynamics of Cardiovascular Behavior: Perspectives on a New Frontier. *The Open Cardiovascular Medicine Journal*(3), 110-123.

Stanford Encyclopedia of Philosophy. (4 de Febrero de 2002). *Quantum Logic and Probability Theory*. Recuperado el 6 de Julio de 2020, de https://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog/

Valdebenito, E. (1 de Julio de 2019). *Fractales: La Geometría del Caos.* Recuperado el 11 de Agosto de 2020, de viXra: https://vixra.org/pdf/1901.0152v1.pdf

Werndl, C. (2013). What Are the New Implications of Chaos for Unpredictability? *The British Journal for the Philosophy of Science, 60*(1), 1-25. doi:10.1093/bjps/axn053