DISQUISICIONES ELEMENTALES SOBRE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO EN UNA VARIABLE (ENSAYO FILOSÓFICO 2015)

ISADORE NABI

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

La presente investigación representa un esfuerzo por recorrer y permitir a otros recorrer los profundos cimientos del Cálculo Riemanniano. No es en Riemann en quien el Cálculo encuentra su más grande generalización, sino en Stieltjes y Lebesgue, basados en los aportes previos de Riemann; sin embargo, tal nivel de generalización rompería con el principio metodológico de la delimitación del foco de investigación.

Aquí se exponen los fundamentos teóricos más importantes que dieron nacimiento al Cálculo Riemanniano, tanto en su primera etapa representada por la novedosa y revolucionaria obra de Leibniz, como en su segunda etapa, representada por la elegancia sencilla del genio de Riemann. Tales fundamentos, como es lógico esperar, tuvieron existencia previa al establecimiento formal del Cálculo como una rama de la Matemática y como se verá a lo largo de la investigación, tienen como fundamento último al Principio de Inducción Matemática.

La investigación se colorea brevemente con pinceladas de lo que podría considerarse una Sociología del Cálculo y una Historia del Cálculo, es decir, una aproximación a la estructura social de la comunidad científica de la época, los sistemas de creencias y las necesidades técnicas que dieron origen al Cálculo Riemanniano, realizando breves referencias históricas. En términos de lo planteado por Thomas Kuhn en su obra "*La Estructura de las Revoluciones Científicas*", el Cálculo Riemanniano representó la manera de maximizar la utilidad del Cálculo de Leibniz ante los problemas en aquel momento existentes, principalmente relacionados a la limitada familia de funciones posibles de integrar, con lo cual Riemann generalizó soluciones y reforzó como no había sido reforzado jamás el paradigma de aquella época[1].

---

[1] "Realizaciones científicas pasadas que alguna comunidad científica reconoce, durante cierto tiempo, como fundamento de su práctica posterior." (Kuhn, 2004).

Por supuesto, sería pecar de ingenuidad pretender en una sola investigación exponer minuciosamente todos los elementos teóricos que posibilitaron la existencia de esta bella rama de la ciencia, mucho menos sería posible realizar la misma labor con los componentes sociales de su surgimiento y existencia.

Esta investigación asume que el lector tiene los conocimientos mínimos necesarios de aritmética, álgebra, límites y derivación para adentrarse en las profundidades del Cálculo Integral. Aquí no se exponen ejemplos concretos de cada una de las secciones y ello obedece a que el carácter de esta investigación es eminentemente teórico, pues a pesar que es evidente el carácter histórico-natural de la evolución humana y con ello de la evolución de las ciencias como un producto humano (con ello implícito que es en la práctica cotidiana que surgen y de la que se nutren las ideas para ser alumbradas y florecer), una vez consolidada la teoría como un solo espíritu científico puede y debe verse como el fundamento de la práctica posterior, en tanto representa el fundamento (depurado y verificado a través del método científico) de la práctica anterior.

Es necesario aclarar al lector la posibilidad de no encontrarse familiarizado con el método de exposición aquí utilizado. En todos y cada uno de los textos que componen la tan diversa gama de bibliografía que versa sobre matemática pura, la exposición de los resultados de las investigaciones bibliográficas se realiza asumiendo que el lector ya posee todas las herramientas necesarias para comprender el texto en cuestión. Aquí se ha valorado que ese supuesto es, cuando menos, bastante alejado de la realidad.

Es por ello que la lógica expositiva de los resultados de esta investigación tiene como finalidad irle proporcionando al lector las herramientas necesarias para la comprensión del camino que conduce al Teorema Fundamental del Cálculo según este vaya necesitándolas. Se pretende ir conduciendo al lector, a medida avance en su lectura, en la comprensión de los fundamentos teóricos previos necesarios para la comprensión de los fundamentos teóricos posteriores, es decir, no se busca que el lector pueda resolver problemas asociados al Cálculo, sino que el lector tenga una comprensión holista de la

Teoría del Cálculo Diferencial e Integral. Sin embargo, este proceso de construcción cognitiva lleva en la práctica un orden completamente diferente del que se aprecia en los libros de texto especializados.

A su vez, los libros de texto especializados antes mencionados poseen una serie de vacíos en términos de fundamentos teóricos sobre el Cálculo concebido como un todo, en los que generalmente se omiten una amplia gama de desarrollos sobre axiomas, teoremas, demostraciones y definiciones de otras ramas de las Matemáticas que fundamental al Cálculo Diferencial e Integral. La razón de ello probablemente obedezca, por un lado, a la dificultad que realizar las conexiones pormenorizadas de cada uno de los supuestos de las otras ramas con el Cálculo no es una tarea en lo absoluto sencilla, pues demanda no solo un razonamiento holista, sino que también demanda al menos un conocimiento superficial de esas otras ramas; por otro lado, este fenómeno también encuentra su explicación en la facilidad de caer en la tentación de alejarse del foco de investigación, pues al ser las Matemáticas la ciencia más antigua (el primer fruto formalizado y sistematizado de la Filosofía), posee un desarrollo tan amplio y profundo que resultaría fácil perderse entre el bosque. En esta investigación se hace un esfuerzo por saldar esas deudas de toda la bibliografía especializada sobre el Cálculo que la antecede.

Claro está, es imposible dejar de agradecer a los autores de estos grandes libros de texto a los que se ha hecho alusión, independientemente aquí no se comulgue en lo absoluto con el método de exposición utilizado. La obra de Tom Apostol, Ron Larson, Luis Acuña y demás, han sido algunas de las bases más importantes sobre las que se ha erigido esta investigación.

Se considera aquí que la construcción del conocimiento obedece a una lógica y un proceso específico que responde al Método Dialéctico-Materialista, el cual, como se expuso en (Gómez, 2016) va de lo abstracto a lo concreto y luego efectúa su viaje de retorno, volviendo a lo abstracto a partir de lo concreto. Eso no significa otra cosa que a partir del cuerpo teórico del Cálculo aún sin modelar en términos de un sistema holista (en el estado en que lo mantienen los libros de texto especializados), se sustraen todos aquellos axiomas, teoremas, definiciones y demostraciones que impiden ver la distancia más corta entre el Principio de Inducción Matemática (lo abstracto) y el Teorema Fundamental del Cálculo (lo concreto) y, una vez establecido ese camino, todos esos elementos que se sustrajeron en la primera etapa del análisis se van incorporando a medida se avanza en el retorno al Principio de Inducción Matemática. Con ello se obtiene la arquitectura real del cuerpo teórico holista que representa el Cálculo, así como la interconexión entre sus elementos y del Cálculo mismo con otras ramas de las Matemáticas. Por supuesto, siempre debe distinguirse el método de exposición con el método de investigación, cuya relación de orden es inversa debido a las claras diferencias existentes entre la construcción del conocimiento y la divulgación del mismo entre el público no especializado, pues exponer los resultados de una construcción teórica no puede pretender lograr su comprensión si se expone tal y como fue elaborada por el investigador.

Resulta inevitable mencionar los invaluables aportes que a la presente investigación realizaron diversos especialistas en esta rama de la matemática. Probablemente si aquí se detuviera a mencionar cada uno de esos aportes esta sección introductoria no podría terminarse nunca, no solo a causa de la importancia cuantitativa y cualitativa de los mismos, sino por la diversidad de especialistas que aportaron. Ya Marx dijo que las tradiciones de los muertos oprimen como una pesadilla el cerebro de los vivos y en ese sentido es mera ilusión pensar que cualquier investigador o grupo de investigadores puede realizar una labor científica de cualquier índole sin estar ligado a todos aquellos hombres de ciencia que aportaron en el pasado (lo cual no solo aplica a nuevos paradigmas, sino también a ampliaciones del paradigma o a simples descripciones bibliográficas del paradigma, como es el caso de esta investigación). Como dijo René Descartes, la lectura es una conversación con los hombres más ilustres del pasado y en ese sentido no se puede más aquí que agradecer a todos esos hombres de ciencia que con muchísimo esfuerzo, sacrificio, talento y determinación han permitido progresar a la especie humana, así como también agradecerles por esas maravillosas y clarificadoras conversaciones que ofrecieron, junto con los lazos de amistad intelectual que se forman al volver al investigador adepto al paradigma, que permitieron llevar a buen puerto esta investigación. Es por ello que algunas de las secciones clave, se presenta un retrato de los grandes matemáticos asociados directa o indirectamente a la temática de la sección a través de alguno(s) de sus descubrimientos.

Además, aquí se realiza un breve y modesto esfuerzo por volver a los orígenes de las matemáticas, rindiendo un humilde tributo a aquellos matemáticos de la antigüedad que jamás desligaron la matemática del seno materno filosófico del que proviene y, al igual que todas las ciencias, siempre provendrá, lo cual les permitió mantenerse como aquellos hombres entre los cuales ningún matemático posterior resiste la más mínima comparación.

II. OBJETIVOS

II.I Objetivo General

- Demostrar el proceso sistemático mediante el cual el Principio de Inducción Matemática conduce a la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo a través de las Sumas de Riemann.

II.II Objetivos Específicos

- Establecer la relación existente entre la Inducción Matemática y las Sumas Superiores e Inferiores.
- Identificar cómo las Sumas de Riemann conducen a la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo más allá de las funciones escalonadas.

III. SUCESIONES Y SERIES

"En cada proposición de contenido enteramente sensible (por ejemplo: la hoja es verde) van ya mezcladas categorías como el Ser y la Singularidad." (Hegel, 2006)

Jean le Rond d'Alembert

Brook Taylor

III.I Principio de Inducción Matemática

El método de inducción matemática se usa para demostrar algunas propiedades acerca de los números naturales. Este método está basando en el principio de inducción, que es una propiedad fundamental de los números naturales.

III.I.I Definición del Principio de Inducción

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

1. $1 \in A$
2. Para todo entero n, si $n \in A$ entonces también $n + 1 \in A$

Por tanto, $A = \mathbb{N}$.

Se acostumbra a usar una notación como $P(n)$ para abreviar una proposición (afirmación) acerca de un número n. A partir del principio de inducción se establecen dos métodos de inducción matemática para demostrar que cierta afirmación $P(n)$ es cierta o válida para todos los números naturales.

Para los fines de esta investigación, el método que resulta de nuestro interés es el *Método de Inducción Fuerte*, el cual opera de la siguiente manera:

1. La proposición $P(1)$ es cierta
2. La suposición de que $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n)$ son ciertas ciertas (llamada hipótesis fuerte de inducción) garantiza que también $P(n+1)$ es cierta.

Por tanto, $P(n)$ se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

III.II Sucesiones

A manera intuitiva, es posible expresar una sucesión como una colección de objetos o eventos si se encuentra de manera ordenada de tal manera que posee un primer término, un segundo término, un tercer término y así sucesivamente hasta un $n - \acute{e}simo$ término. Una sucesión combina diversos elementos de las Matemáticas, tales como el Principio de Inducción Matemática, Aritmética y Álgebra, generalizándolos en un nuevo instrumental teórico.

A nivel de la matemática formal, una sucesión se define como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Aunque una sucesión es una función, es común representar las sucesiones empleando subíndices en lugar de la notación habitual de la función.

III.II.I Definición del Límite de una Sucesión

Sea L un número real. El límite de una sucesión $\{a_n\}$ es L. Con lo que se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > M$. Si el límite de una sucesión existe, entonces la sucesión converge a L. Si el límite de una sucesión no existe, entonces la sucesión diverge[2].

III.II.II Límite de una Sucesión

a) Sea L un número real. Sea f una función de una variable real tal que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

b) Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para cada entero positivo n, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

III.II.III Definición de una Sucesión Monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona si sus términos son no decrecientes:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona si sus términos son no crecientes:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

Las sucesiones que resultan de interés en esta investigación son específicamente las sucesiones monótonas no decrecientes, pues son las que se encuentran implícitas en el Teorema Fundamental del Cálculo.

III.II.IV Definición de una Sucesión Acotada

a) Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n. El número M es llamado como cota superior de la sucesión.

---

[2] En relación al foco metodológico de esta investigación, lo que resulta de interés son solo aquellas sucesiones que poseen convergencia hacia un número real específico L.

b) Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente si existe un número real m tal que $a_n \geq m$ para todo n. El número m es llamado como cota inferior de la sucesión.
c) Una sucesión es acotada si lo está superior e inferiormente.

III.II.V Sucesiones Monótonas Acotadas

Si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada y monótona, entonces converge.

III.II.V.I Demostración para Sucesiones No Decrecientes

Al ser la sucesión acotada, debe existir una cota superior M tal que:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq M$$

Por el Axioma de Completitud[3], se sigue que existe una mínima cota superior L tal que:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq L$$

Para $\varepsilon > 0$, se sigue que $L - \varepsilon < L$, y por consiguiente $L - \varepsilon$ no puede ser una cota superior de la sucesión. Por tanto, al menos un término de $\{a_n\}$ es mayor que $L - \varepsilon$. Es decir, $L - \varepsilon < a_N$ para algún entero positivo $\mathbb{N}$. Como los términos de $\{a_n\}$ son no decrecientes, se sigue que $a_N \leq a_n$ para todo $n > N$. Se sabe que $L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$ para todo $n > N$, por lo que se sigue que $|a_n - L| < \varepsilon$, lo cual por definición significa que $\{a_n\}$ converge a L.

III.III Series

Una aplicación importante de las sucesiones infinitas es la representación de "sumas infinitas". Una serie es la generalización de la noción de suma a los términos de una sucesión matemática. Sin embargo, es necesario aclarar que al hablar de "sumas infinitas"

[3] En términos simples, este axioma dice que el conjunto de los números reales "no tiene huecos", garantizando así la continuidad.

se hace referencia en realidad al límite de las sumas cuando el número de términos sumados tiende al infinito.

Para encontrar la suma de una serie infinita, se debe considerar la sucesión de sumas parciales. Al hablar de una $suma\ parcial\ k-ésima$ de la serie se hace referencia a la suma de una parte de la serie, sólo hasta el término $k-ésimo$.

III.III.I Definición Formal de Serie

Sea $\{a_k\}$ una sucesión numerada a partir de un entero N: $a_N, a_{N+1}, a_{N+2,}a_{N+3}, \ldots$. Su serie es la suma:

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots$$

Los números $a_N, a_{N+1}, a_{N+2,}a_{N+3}, \ldots$ son los términos de la serie.

III.III.II Definición Formal de Suma Parcial y Suma Total

Para un entero $n \geq N$, la $suma\ parcial\ n-ésima$ de la serie $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$es:

$$S_n = \sum_{k=N}^{n} a_k = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots + a_{N+n}$$

Como es posible observar, S_n representa una sucesión de sumas parciales (hasta la suma parcial $n-ésima$) o lo que es lo mismo, representa una serie donde cada uno de sus componentes son los denominados *términos de la serie*. Esto implica que se transformó lo que antes era una sucesión infinita en una serie finita tomando únicamente una parte de la suma de los términos de la sucesión infinita, no su totalidad (por ello se denominan sumas parciales).

La $suma\ total$ de la serie es:

$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$ si el límite existe.

En ese caso se dice que la serie converge o que es convergente. Entonces aquí se transformó una sucesión infinita a una suma total finita (en caso el límite exista), planteando una sucesión de sumas parciales infinita en términos de una tendencia límite.

IV. TEOREMAS DE SUMAS Y SUS DEMOSTRACIONES POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA

"*LA DOBLE NECESIDAD*, por una parte, de tener un contenido concreto respecto a las teorías abstractas del intelecto el cual no puede por sí mismo proceder de las propias universalidades hacia la particularización y la determinación y, por otra parte, de tener un apoyo sólido y estable respecto a la posibilidad de demostrar cada cosa sobre el terreno." (Hegel, 2006)

Diofanto de Alejandría

Los teoremas, basados y demostrados a través de la inducción matemática, equivalentes a las sumas que a continuación se presentan responden a la necesidad de nuestra especie de sintetizar procesos generales o abstractos del intelecto, con el fin de volver más eficiente la investigación científica, sin embargo, estas necesidades, aunque empujados por momentos histórico-sociales específicos, fueron planteadas por unos cuantos hombres de ciencia y resueltas de igual manera. A su vez, representan la consolidación del paradigma científico de la época implícita en la demostración de la terrenalidad del pensamiento.

a) $$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d) $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

IV.I Demostración del Teorema de Suma para i

Declaración $P(n)$: $(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$

- Base: Se muestra que es válida para $n = 1$.

Por lo que para $P(1)$ se tiene:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

1=1. Por lo tanto, $P(1)$ es verdadera.

- Paso Inductivo: Se demuestra que si $P(n)$ es verdadera.

Entonces se debe demostrar que:

$P(n+1)$ es verdadera.

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Usando la Hipótesis de Inducción $P(n)$ es verdadera, el termino izquierdo se puede tomar como[4]:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Puesto que se han realizado los dos pasos de inducción matemática, tanto Base como Inductivo, la declaración $P(n)$ se cumple para todo numero natural n.

Quod erat demonstrandum

IV.II Demostración del Teorema de Suma para i^2

Declaración $P(n)$: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Base: Se muestra que es válida para n = 1.

Por lo que para $P(1)$ se tiene:

$$1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 = \frac{(1)(2)(3)}{6}$$

[4] Esta transformación se debe a que la Hipótesis de Inducción plantea $(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$, luego a $\frac{n(n+1)}{2}$ se le suma (n + 1) que ya se encuentra al lado izquierdo de la igualdad.

1=1. Por lo tanto P(1) es verdadera[5].

- Paso Inductivo: Se demuestra que $P(n)$ es verdadera.

Entonces, se probará que $P(n+1)$ es verdadera:

$$(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Usando la hipótesis de inducción P(n) y tomándola como verdadera, el término izquierdo se puede reescribir como[6]:

$$\begin{aligned}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

Mostrando que $P(n+1)$ es verdadero.

Puesto que se han realizado los dos pasos de inducción matemática, tanto Base[7] como Inductivo, la declaración $P(n)$ se cumple para todo numero natural n.

---

[5] Del lado izquierdo de la igualdad se deberá de tomar el n! del numero n escogido, debido a que es una sucesión por inducción matemática.

[6] Se sustituirá n en todos los (n + 1).

[7] También conocido como Hipótesis de Inducción.

Quod erat demonstrandum

IV.III Demostración del Teorema de Suma para i^3

Declaración $P(n)$: $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

- Base: Se muestra que es válida para $n = 1$.

Por lo que $P(1)$ se tiene:

$$1 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

1 = 1. Por lo tanto, $P(1)$ es verdadero

- Paso Inductivo: Se demuestra que si $P(n)$ es verdadera.

Entonces:

$P(n+1)$ es verdadera.

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$$
$$= \frac{n^4 + 8n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Mostrando que $P(n+1)$ es verdadero.

Puesto que se han realizado los dos pasos de inducción matemática, tanto Base como Inductivo, la declaración $P(n)$ se cumple para todo numero natural n.

Quod erat demonstrandum

V. FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

"El Yo refiere a sí mismo la multiplicidad de las sensaciones y de las intuiciones, y las unifica como una única conciencia. Por lo tanto, tal multiplicidad queda reducida a la identidad, una conexión originaria. Los modos determinados de esta relación son los conceptos puros del intelecto, las categorías."[8] (Hegel, 2006)

Leonhard Euler

Es aquella función cuya definición[9], llamada Regla de Correspondencia, cambia dependiendo del valor de la variable independiente.

Formalmente, una función real f definida a trozos de una variable real x es la relación cuya definición está dada por varios conjuntos disjuntos de su dominio, conocidos como subdominios.

La expresión "a trozos" se usa para describir cualquier propiedad de una función definida a trozos que se cumple para cada trozo, aunque podría no cumplirse para todo

[8] En esta analogía, el "Yo" es la función en general, donde la unificación de la multiplicidad de sus trozos se logra mediante la regla de correspondencia para cada uno de ellos, que a su vez está sujeta a la función como un todo.
[9] La regla que define la dependencia.

el dominio de f. Por ejemplo, una función es diferenciable a trozos si cada trozo es diferenciable a lo largo del dominio.

V.I Definición

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera y f una función, entonces:

$$f: A \to B \ definida\ entre\ ellos.$$

Supóngase que A puede representarse como una unión de conjuntos disjuntos A_i, entonces:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,, con\ A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall j \neq i$$

Y para cada uno de los A_i f_i: $f_i: A \to B$. Entonces, f es una función definida a trozos si $\forall x \in A_i f(x) = f_i(x), 1 \leq i \leq n$.

En otras palabras, f es definida a trozos si su regla de asignación es diferente para al menos dos valores de la variable independiente x.

V.II Relación Binaria

Es una relación matemática $\Re$ definida entre los elementos de dos conjuntos A y B. Una relación $\Re$ de A y B se puede representar mediante pares ordenados (a, b) para los cuales se cumple una propiedad $\wp(a, b)$ de forma que $(a, b)\epsilon AxB$ y se denota:

$\Re = \{(a, b)\epsilon AxB | \wp(a, b)\}$

Lo anterior se lee: La relación binaria $\Re$ es el conjunto de pares ordenados (a, b) pertenecientes al producto cartesiano[10] de AxB y que para los cuales se cumple la propiedad $\wp$ que los relaciona.

V.III Correspondencia Matemática

Dados dos conjuntos x y y, así como una función f que determina alguna relación binaria entre algún elemento de x con algún elemento de y, se dirá que esa función f define una correspondencia entre x y y que se representa por: $f: x \rightarrow y$, cuando al menos un elemento de x esté relacionado con al menos un elemento de y.

VI. DEFINICIÓN ÉPSILON-DELTA ($\varepsilon - \boldsymbol{\delta}$)

"El concepto y el ser son los dos momentos que la razón busca unificar. Tal unificación es el ideal de la razón." (Hegel, 2006)

Bernard Bolzano

El concepto no es más que una de las formas del reflejo del mundo en el pensar, mediante la cual se entra en el conocimiento de la esencia de los fenómenos y procesos, se generalizan los aspectos y los caracteres fundamentales de los mismos; por su parte, el ser no es más que el mundo objetivo independiente de la conciencia de los hombres. La definición $\varepsilon - \boldsymbol{\delta}$ de un límite, no es más que la definición formal de una intuición formada sobre esta característica de las funciones, es decir, a través del proceso de abstracción teórica se logra el ideal de la razón, unificar la existencia de los límites (los cuales son

[10] Una operación entre dos conjuntos, que resulta en otro conjunto, cuyos elementos son todos los pares ordenados que pueden formarse de forma que el primer elemento del par ordenado pertenezca al primer conjunto y el segundo elemento pertenezca al segundo conjunto.

independientes de la existencia del hombre, pues no se han creado, sino descubierto) con el reflejo de su existencia en el pensar. De ahí que la definición $\varepsilon - \boldsymbol{\delta}$ sea la unificación entre el concepto (el reflejo de la existencia de los límites) con la existencia misma de los límites, independiente de la existencia humana.

A continuación, se introducirá el concepto de límite, no de forma intuitiva sino formal. La definición intuitiva de límite es resultado de la forma en que este concepto matemático se expresa gráficamente. Por su parte, la definición formal no es más que la expresión matemáticamente rigurosa de tal intuición, que unifica dicha intuición con su representación.

Es necesario comenzar por familiarizarse un poco con la definición formal de un límite, que no es más que la formalización de la noción intuitiva de aproximación hacia un punto concreto de una sucesión o una función, a medida que los parámetros[11] de esa sucesión o función se acercan a un determinado valor. Se dice que $f(x)$ se acerca a un límite cuando x se acerca a un valor a. Ahora bien, al hablar de un acercamiento o aproximación, se está hablando implícitamente de la distancia entre dos valores. ¿Cómo es posible representar la noción de cercanía?, restando un valor de otro para conocer dicha distancia. En el caso de la definición formal de un límite, al decir que $f(x)$ se acerca hacia un valor límite L se tiene que sustraer L de $f(x)$, es decir, $f(x) - L$ y al decir que x se acerca hacia un valor a se tiene que hacer lo mismo, es decir, $x - a$. Sin embargo, las distancias no puede ser valores negativos, por lo que se recurre a la utilización del valor absoluto para garantizar valores positivos en la resta, por tanto, se tendría $|f(x) - L|$ y $|x - a|$. Esto a su vez implicaría que $|f(x) - L|$ es un valor muy pequeño cuando $|x - a|$ es un valor muy pequeño.

Ahora bien, para formalizar aún más la noción intuitiva de límite, se tendrá que elegir un determinado valor para $|f(x) - L|$ y otro determinado valor para $|x - a|$, debido a que es

[11] Constantes que pueden ser variables.

necesario acotar o "encerrar" cada uno de estos valores absolutos, ¿cómo es que se logra acotar cada uno de estos valores absolutos?, la respuesta se encuentra en la definición misma del valor absoluto. Un valor absoluto no es más que el valor numérico de un número real sin tener en cuenta su signo. Entonces cuando se "encierra" cada una de las restas automáticamente se está acotando o "cercando" alrededor de determinado valor. Por ejemplo, el $|3|$ significa que $-3 < |3| < 3$. Quien planteó esta definición formal de un límite fue el matemático francés Augustin Louis Cauchy, diciendo que habría un error en la aproximación de $f(x)$ hacia L, lo que denotó por la letra $\mathcal{E}$ y que habría a su vez una distancia que representaría el cambio en las abscisas de x hacia a, lo que denotó con la letra δ. Lo anterior significa que Épsilon ($\mathcal{E}$) es el error de aproximación de $f(x)$ hacia L y Delta (δ) es la distancia recorrida o la variación en las abscisas al pasar de un valor x hacia un valor a.

Por supuesto, realizar el acotamiento de forma adecuada en términos matemáticos es necesario que tanto Épsilon como Delta sean positivos, es decir, mayores que cero, pues de lo contrario, el acotamiento no sería posible. Finalmente, se requiere también que el valor absoluto de x menos a sea también mayor que cero, ¿por qué?, pues al plantear la Definición Épsilon-Delta se está planteando a su vez que x tiende hacia a, pero es una tendencia de x en que esta variable tomará valores cercanos en relación con a, sean estos mayores o menores que a, pero nunca iguales que a. Al introducir el valor absoluto y garantizar que la resta sea positiva, se está introduciendo también que $0 < |x - a|$, pues cero es siempre menor que cualquier número positivo. Por supuesto, lo anteriormente expuesto debe complementarse con el hecho que para que un límite L exista, el valor del límite L cuando x tiende hacia a tanto por la izquierda como por la derecha, debe ser el mismo. ¿Cómo es posible esto?, la respuesta se encuentra en la misma definición formal de un límite y en el Teorema del Encaje visto anteriormente. Al plantear que $|f(x) - L| < \mathcal{E}$ se está expresando a su vez que $L - \mathcal{E} < f(x) < L + \mathcal{E}$, es decir, que el valor de la función evaluada en x se encontrará en un intervalo equivalente al límite menos Épsilon y el límite más Épsilon, lo que matemáticamente significa que el límite será idéntico en ambos extremos del intervalo; análogamente, al plantear que $|x - a| < \delta$ se está expresando a su vez $a - \delta < x < a + \delta$, es decir, que el de x se encontrará en un intervalo equivalente a la tendencia menos Delta y la tendencia más Delta, lo que matemáticamente significa que la tendencia será idéntica en ambos extremos del intervalo. Siendo esto así, no importa si tomemos un valor por la izquierda o por la derecha de la tendencia de x, la tendencia en sí misma será igual y el valor de la función evaluada en x tendrá también el mismo límite tanto por la izquierda como por la derecha.

En otras palabras, esta definición lo que dice es que se busca un intervalo alrededor del límite L muy pequeño y que L siempre será un valor que, tendencialmente, le corresponderá a y.

Ɛ (Épsilon): Es un número infinitamente pequeño que se le sumará y restará al valor del límite para poder delimitar la tendencia alrededor de ese intervalo en y.

δ (Delta): Es un número que dependerá del valor de Ɛ (Épsilon) y servirá para delimitar la tendencia alrededor de ese intervalo en x.

VI.I Formalización de Ɛ (Épsilon)

$- \varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$[12]

$\lim_{x \to a} f(x) = L$[13]

[12] Al restarle y sumarle al límite un valor Épsilon a la izquierda y derecha de la función, respectivamente, lo que se establece es un acotamiento de dicha función en un intervalo. Lo anterior implica que el acotamiento por la izquierda representa un valor menor a la función evaluada en x y el acotamiento por la derecha representa un valor mayor a la función evaluada en x.
[13] Esto es, ni más ni menos, que la definición formal de un límite para una función $f(x)$ cuando x tiende hacia un valor a.

VI.II Formalización de δ (Delta)[14]

$0 < |x - a| < \delta$

$|x - a| < \delta$

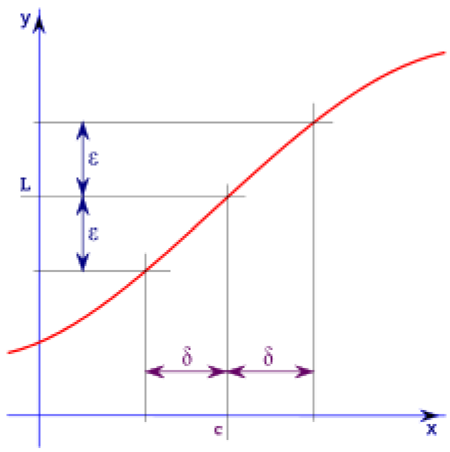
$-\delta < x - a < \delta$

$-\delta + a < x < \delta + a$

Obsérvese que al contrario de lo que en Teoría Matemática se acostumbra a realizar (establecer que y dependa de x), aquí Delta depende de Épsilon, porque se parte de Épsilon para acotar el límite, esto debido a que el valor del límite será siempre un valor en y. Posteriormente se procede a definir un valor Delta en x. A su vez, se acota primero el valor del límite y no x porque se está probando que el resultado del límite en la función evaluada en x es L y porque para todo $\mathcal{E} > 0, \exists\ \delta$. En otras palabras, se acota primero el valor en y por la conveniencia que esto representa, es decir, porque se requiere acotar el límite y este siempre será un valor en y, independientemente que sea un valor resultante de evaluar la función en x, dado que el acotamiento previo no está relacionado directamente en términos matemáticos con la evaluación de la función en x.

[14] Nótese que a es equivalente al c de la gráfica de la Definición $\mathcal{E}$- δ, pues ambas representan una constante cuya notación se escoge arbitrariamente, hacia la cual tiende la variable independiente x.

VI.III Representación Gráfica



VII. FUNCIONES ESCALONADAS Y PARTICIONES

"Las expresiones de Descartes sobre la proposición que afirma de la inseparabilidad del mí como pensante del ser; es decir, que aquel nexo esté contenido y dado en la intuición simple de la conciencia; que ese nexo sea absolutamente el primero, es principio, el principio, lo más cierto y lo más evidente."[15] (Hegel, 2006)

Gottlob Frege

Una función escalonada es aquella función definida a trozos que en cualquier intervalo finito $[a, b]$ en que esté definida tiene un número finito de discontinuidades $c_1 < c_2 < \cdots, < c_n$ y que en cada intervalo (c_k, c_{k+1}) es constante, teniendo discontinuidades de salto en los puntos c_k. En otras palabras, una función escalonada es aquella en la cual la imagen posee el mismo valor en cada subintervalo del argumento, variando el valor de la imagen solo de un subintervalo a otro, no dentro del mismo subintervalo. En la definición anterior, no se toma en cuenta el último valor del intervalo (puede observarse que es

[15] El "Mí" es equivalente al "Yo" y en el Sistema Filosófico de Descartes existe un nexo indisoluble entre el "Yo" y el "Pensante del Ser" (el pensamiento del ser (del "Yo"), la sustancia pensante o el "Yo Pienso"), entonces Descartes razona que si "Yo" sea lo que sea, tengo una existencia indiscutible, también es indiscutible la existencia de una realidad de la cual el "Pensante del Ser" (el pensamiento del ser -del "Yo"-) es un subconjunto (una realidad del cual el pensamiento del ser forma parte y, por tanto, es producto de ella). Esto le proporciona a ese "Pensante del Ser" una existencia real, donde el "Yo" es concreto, pues el pensante del ser tiene como base una existencia objetiva (el "Yo"), por tanto, si existe un pensamiento cuya existencia es indudable, también lo será la existencia del ser del cual el pensamiento es producto. Todo eso es lo que implica el "Yo pienso, luego existo" de Descartes, también conocido como "Cogito Cartesiano". Precisamente lo anterior fue lo que sirvió para que la Filosofía y las Ciencias tuvieran cimientos racionales en lugar de metafísicos (una vertiente del Idealismo Filosófico). Se escogió esta cita como analogía para la presente sección pues la importancia de las funciones escalonadas (permiten que los lados opuestos de las figuras formadas en el área bajo la curva posean la misma longitud y se transformen en $n-\acute{e}simos$ rectángulos representativos) se logra apreciar con mayor facilidad gráficamente y fue René Descartes el fundador de la Geometría Analítica. En la analogía, el "Yo" serían las funciones escalonadas, que permiten la existencia de las particiones (el "Pensante del Ser"), por lo que las particiones son ciertas (válidas científica/matemáticamente), producto de que así lo garantiza la existencia de ese "Yo".

semi-abierto, puesto que a se incluye y b no), pues representa el lado del último rectángulo representativo (el $n-\acute{e}simo$), y al ser una línea, no debe incluirse, pues el área de una línea es cero.

En la Teoría de integración se trabaja principalmente con funciones reales, cuyo dominio son integrales en el eje x.

El concepto de Integral se define primero para funciones escalonadas y luego se utiliza la integral de funciones escalonadas para formular la definición de integral para funciones más generales.

VII.I Primera Definición[16]

Sea $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J}=[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ y un conjunto finito $\mathrm{P}=(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n) \subset \mathrm{J}$,se llama una partición de J si $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$.

En este caso J se supone descompuesto en n subintervalos al fijarse $(\mathrm{n}-1)$ puntos de subdivisión $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}$, sujetos a la restricción anterior, los n subintervalos son:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\dots,[x_{n-1},x_n]$$

Se dice que $[x_{k-1},x_k]$ es el subintervalo cerrado $k-\acute{e}simo$ de J determinado por P, o bien, el subintervalo cerrado $k-\acute{e}simo$ de P.

VII.II Segunda Definición[17]

Sea $\mathrm{J}=[\mathrm{a},\mathrm{b}] \subset \mathbb{R}$

[16] Introducción a las Particiones.
[17] Afinamiento de Particiones.

Sean P y P′ particiones de J, se dice que P′ es más fina que P, o que P′ es un afinamiento[18] de P, si $P \subset P'$.

VII.III Tercera Definición[19]

Sea P una partición de $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, se define la norma de P y se denota como $|P| = \text{máx}\{(x_k - x_{k-1}) |\ \mathrm{k} = 1,2,3, \dots, \mathrm{n}\}$.

Esto es, la longitud del mayor subintervalo determinado por P.

La norma de P de sirve para calibrar su fineza[20].

Si el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ se divide en $(n+1)$ puntos igualmente espaciados, la longitud de cada uno es $\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}$ y se tiene:

$$x_0 = a + 0(\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}), x_1 = a + 1(\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}), \dots, x_k = a + k(\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}).$$

VII.IV Cuarta Definición[21]

Una sucesión de particiones $\{P_n\}$ de $[a, b]$ se dice normal si $\lim_{n\to\infty} |P\mathrm{n}| = 0$.

VII.V Quinta Definición[22]

Una función S cuyo dominio es el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$[23] se dice que es una función escalonada si existe una partición $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, tal que S es constante en cada

[18] Que una partición sea más fina que otra significa que tiene más elementos dentro de su subconjunto respecto a la partición menos fina. El concepto de fineza de una partición no tiene que ver con que sea más grande o más pequeña, sino con el hecho que permite calcular con más exactitud el concepto de área.
[19] Igual longitud de $(n+1)$ particiones.
[20] Esto significa partir cada vez más los intervalos en subintervalos más pequeños.
[21] Sucesión Infinita de Particiones.
[22] Sucesión Infinita de Particiones para Funciones Escalonadas.
[23] Los paréntesis denotan intervalos abiertos, los corchetes denotan intervalos cerrados.

subintervalo abierto de P. Es decir, para cada $k = 1, 2, 3, \dots, n$ existe un número real S_k tal que $S(x) = S(k)$, si $x_{k-1} < x < x_k$[24].

VII.VI Observaciones

a) Si una función escalonada es constante en los subintervalos abiertos de una partición P lo es también en los subintervalos abiertos de cada afinamiento P'.
b) Además, como se planteó en secciones anteriores, una función escalonada puede tener sólo un número finito de discontinuidades. Si s es una función escalonada, entonces:

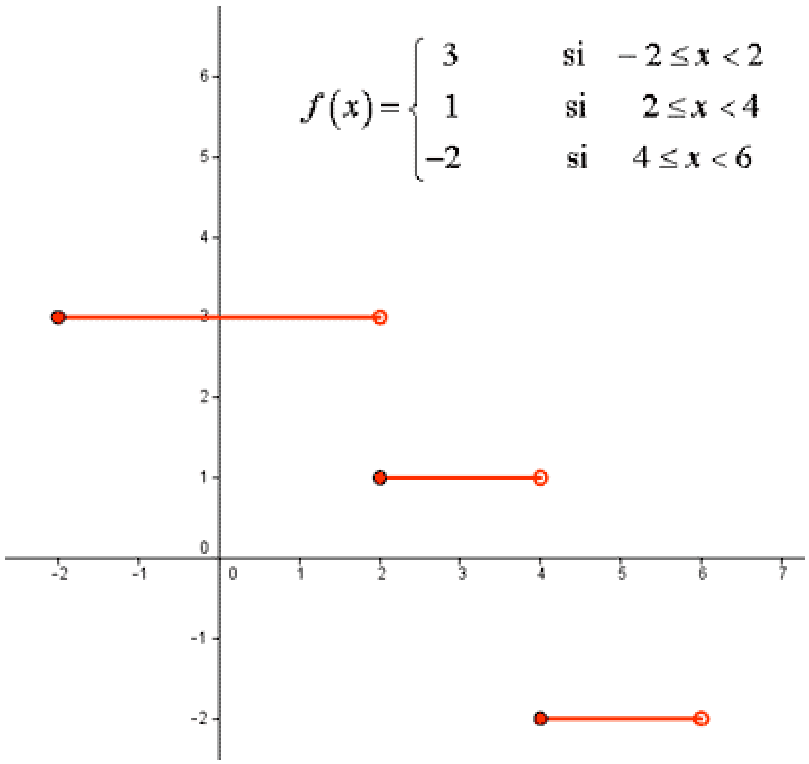
$$\lim_{x \to {x_{k-1}}^{+}} s(x) = \lim_{x \to {x_k}^{-}} s(x)$$

Donde $x > x_{k-1}$ y $x < x_k$.

c) Toda función escalonada s definida en $[a, b]$ es acotada en $[a, b]$. Es decir, existe un número $M > 0$ tal que $|s(x)| \leq M$ para cada $x \in [a, b]$.

[24] Nótese que, en todas las definiciones anteriores, se estableció en qué consistía la longitud de cada subintervalo dividido en $(n + 1)$ puntos, lo cual viene dado por $\frac{b-a}{n}$

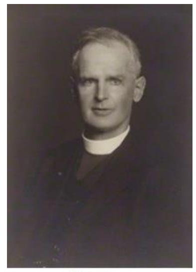
VII.VII Representación Gráfica



Lo anterior es la expresión gráfica de una función a trozos escalonada y, como se puede recordar, al inicio de esta investigación se estableció que las sucesiones que representan el núcleo del Teorema Fundamental del Cálculo deben poseer términos que sean monótonos crecientes (o no decrecientes) acotados y no monótonos decrecientes (o no crecientes) acotados, lo cual responde precisamente al hecho que el comportamiento de los términos de la sucesión debe corresponderse con el comportamiento de los números reales enteros positivos; además, tales términos crecientes de la sucesión no serán otros que los escalones de la función a trozos de la cual se desea obtener un área bajo la curva o como se verá más adelante, los escalones de las dos funciones a trozos entre las cuales se acotarán funciones más generales que las escalonadas de las cuales se desea obtener dicha área.

VIII. NORMA DE PARTICIÓN DE UN ÁREA BAJO LA CURVA

"La representación de un intelecto intuitivo, de una finalidad interna, etcétera, es juntamente lo universal pensado como concreto en sí mismo." (Hegel, 2006)



Alfred Young

Como se verá a continuación, lo que teóricamente representa la norma de partición es sumamente basto, podría decirse incluso que universal a nivel del Cálculo Diferencial e Integral, pues permite una mejor aproximación al área de una curva, representa el valor del cambio en x de un punto a otro y conlleva a que el número de rectángulos representativos tienda hacia el infinito, pero a su vez es resultado del Principio de Inducción Matemática y es posible únicamente debido al establecimiento previo de funciones definidas a trozos que generan escalones cuyos valores son números enteros positivos. Sin embargo, la abstracción teórica que representa la norma de partición encuentra dentro de ella misma, dentro de su mismo marco teórico, tanto del que permite desarrollar como del que es un desarrollo, su concreción o materialidad expresándose como la suma de ella misma a lo largo de un área definida bajo una determinada función.

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ partición de $[a, b]$ dada por:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k = b$$

Donde Δx_k es el ancho del $k-ésimo$ subintervalo. Si c_k es cualquier punto en el $k-$ $ésimo$ subintervalo $|x_{k-1}, x_k|$ entonces se tiene la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Acotada por:

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$$

La suma anterior se denomina una Suma de Riemann de f para la partición Δ.

El ancho del subintervalo más grande de la partición Δ representa la Norma de Partición y se denota por medio de $||\Delta||$. Si todos los subintervalos tienen la misma anchura, la partición es regular u ordinaria y la Norma de Partición se denota mediante:

$$||\Delta|| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

En una Partición General, donde los subintervalos tienen diferente anchura, la Norma se relaciona con el número de subintervalos en $[a, b]$ de la siguiente manera:

$$\frac{b-a}{||\Delta||} \leq n$$

De tal modo, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito cuando la norma de partición tiende a cero[25]. Es decir, $||\Delta|| \to 0$ implica que $n \to \infty$.

---

[25] Sin embargo, la afirmación recíproca no es verdadera. Véase el siguiente caso:
Sea Δ_n la partición del intervalo $[0, 1]$ dado por $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \cdots < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$. Nótese que para cualquier valor positivo de n, la Norma de Partición Δ_n es $1/2$. De tal modo, al permitir que n tienda al infinito no obliga a que $||\Delta||$ se aproxime a 0, pues en el ejemplo expuesto $\left||\Delta|\right| = \frac{1}{2}$. En una partición regular, sin embargo, los enunciados $||\Delta|| \to 0$ y $n \to \infty$ son equivalentes. La razón por la que se utiliza $||\Delta|| \to 0$ en lugar de $n \to \infty$ es debido al hecho que plantear el límite en términos de n permite estructurar todo lo visto anteriormente en un sistema teórico coherente y más claro, pues todos los teoremas desarrollados con antelación a esta sección se encuentran en términos de esta variable de tendencia, pues ella representa en cada uno de los mismos la tendencia hacia el infinito y es precisamente en los límites al infinito que todo el Cálculo encuentra su fundamento interno (su fundamento externo y último lo encuentra en el Principio de Inducción Matemática). A su vez, vale aclarar que Δ_n no es más que

Por tanto:

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = L$$

Afirma que este límite existe, lo que a su vez significa que hay un número real L, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que para toda partición de $||\Delta|| < \delta$ se sigue que:

$$\left| L - \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon$$

A pesar de cualquier elección de C_k en el $k - ésimo$ subintervalo de cada partición de Δ.

Por tanto:

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\Delta x$$

Si y solo si:

a) f se define en el intervalo $[a, b]$
b) Se cumple que el límite de las Sumas de Riemann sobre las particiones Δ:
   $\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ existe[26].

una notación que representa el valor de la norma de partición cuando $n \to \infty$ que, visto como una sucesión, es el valor al que converge la norma de partición con la tendencia límite al infinito, que como ya se vio en el ejemplo, $\left||\Delta|\right| = \frac{1}{2}$.

[26] Lo que garantizaría que $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$.

IX. TEOREMA DEL ENCAJE

"La cantidad, puesta esencialmente junto con la determinidad exclusiva que en ella está contenida, es el cuanto, la cantidad limitada." (Hegel, 2006)

Carl Gauss

Este teorema ocupa, basándose en los resultados de esta investigación, el podio en importancia junto con la Definición Épsilon-Delta y el Teorema de Bonnet-Lagrange a nivel del Cálculo Diferencial e Integral. Lo que dice este teorema es simplemente que al establecer arbitrariamente un intervalo comprendido entre dos funciones que tengan el mismo límite, cualquier otra función que se encuentre en el intervalo comprendido entre estas dos funciones, tendrá el mismo límite que ellas. La importancia fundamental de este teorema radica en que fue el que le permitió a Riemann, como ya se verá más adelante, colocar entre dos funciones escalonadas, cuyos límites fueran idénticos, funciones no escalonadas que cumplieran con las condiciones de Integrabilidad y así, hacer posible una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo. Esta lógica, aunque en la época actual resulte elemental, fue un descubrimiento revolucionario del matemático alemán, que permitió al Cálculo ampliar su utilidad a más ramas de la ciencia y con mayor profundidad. Las funciones escalonadas no son más que lo exterior del Teorema del Encaje, el envoltorio que rodea su componente interior, es decir, garantizar la existencia de un límite específico para una gama infinita de funciones.

Si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite punto. Representándolo matemáticamente:

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \wedge \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

Entonces,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

IX.I Demostración del Teorema del Encaje

Por hipótesis, para cada x distinto de a en el intervalo I, se tiene:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \wedge \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \Rightarrow g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L$$

Utilizando la definición Épsilon-Delta se planteará que sean ε_1 y ε_2 dos números positivos cualquiera, pueden escogerse respectivamente dos intervalos $(a - \delta_1, a + \delta_1), (a - \delta_2, a + \delta_2)$ contenidos en I, tales que para los x en la intersección de dichos intervalos, se cumplen las desigualdades:

$$| g(x) - L | < \varepsilon_1, | h(x) - L | < \varepsilon_2$$

Si valen para cualquier par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ permite tomar por conveniencia una cantidad común $\varepsilon = mín\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Por lo tanto, se deduce que para x en$(a - \delta_1, a + \delta_1) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2)$:

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon.$$

Designando δ como el mínimo entre δ_1y δ_2, la pertenencia de x a la intersección de los referidos entornos ($P \in \cup \subseteq V$), es equivalente a afirmar que x se encuentra entre $(a - \delta)$ y $(a + \delta)$.

Se deduce formalmente a su vez que:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

Puesto que se asumió x distinto de a desde el principio, podemos expresar la definición anterior como:

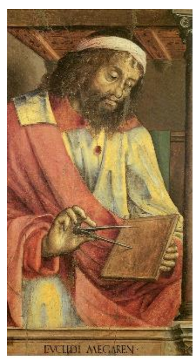
$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$$

La elección de x en el $k-ésimo$ intervalo no afecta al límite. Esto significa que se está en libertad de elegir cualquier valor de x arbitrario en el $k-ésimo$ subintervalo.

Quod erat demonstrandum

X. SOBRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS, ESPACIOS MÉTRICOS, CONJUNTOS CONEXOS Y CONJUNTOS CONVEXOS APLICADOS AL CÁLCULO

"La existencia es la unidad inmediata de la reflexión-en-sí y de la reflexión-en-otro. Ella es, por lo tanto, la multitud indeterminada de los existentes como reflejados-en-sí, al mismo tiempo reflejados-en-otro." (Hegel, 2006)



Euclides

Los conceptos de espacio topológico, espacios métricos, conjuntos conexos y conjuntos convexos tienen peculiares relaciones entre sí. Por ejemplo, los espacios métricos operan bajo sus propias reglas, sin embargo, son una variedad de los espacios topológicos que no operan necesariamente con estas mismas reglas, aunque los primeros deben cumplir las características específicas que definen a los segundos.

Por otro lado, los conjuntos convexos son a su vez conjuntos compactos, por las condiciones que cumplen, las cuales se verán en breve; sin embargo, afirmar lo contrario es falso, precisamente por estas mismas propiedades características de cada uno de ellos.

Estos dos pares, los pares-espacio y los pares-conjuntos se encuentran en unidad indisoluble, sin embargo, su relación no es de tipo lineal, sino dialéctica, pues los espacios topológicos se reflejan en los métricos, así como los métricos en los topológicos, pero los espacios topológicos son espacios más vastos y extensos que los métricos, contienen a los espacios métricos y, por tanto, su reflejo en ellos solo es inmediato y no mediato[27], tal y como el todo se refleja en las partes. Exactamente lo mismo sucede con los conjuntos conexos y los conjuntos convexos.

X.I Espacio Topológico

Formalmente, un espacio topológico es una estructura matemática que vuelve posible la definición formal (para este caso, la construcción de un conjunto del tipo de conjunto definido y con ello, el límite que separa a un conjunto del resto de conjuntos) de conceptos que se desarrollarán más adelante, tales como convergencia, continuidad, conectividad y entorno. En otras palabras, los espacios topológicos son pares ordenados (X, T) formados por un conjunto X y una topología T respecto a X, es decir, T es una colección de subconjuntos de X que cumplen determinadas propiedades.

X.I.I Propiedades de los Espacios Topológicos

a) El conjunto vacío[28] y E pertenecen a T: $\emptyset \in T, E \in T$
b) La intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de T pertenece también a T: $(O_1 \in T, O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)$

[27] Por definición, un espacio métrico está contenido en un espacio topológico y, con ello, la relación entre el uno y el otro no tiene mediaciones (a partir de causas medias).
[28] Un conjunto vacío es aquel que no tiene elementos.

c) La unión de toda colección de conjuntos de T pertenece también a T: $\forall S \subset T, \cup_{O \in S} O \in T$.

A los conjuntos pertenecientes a la topología T se les llama conjuntos abiertos[29] y a sus complementos en E conjuntos cerrados[30].

X.II Espacio Métrico

Es una estructura matemática o conjunto que lleva asociada una función distancia, es decir, una función que regula el comportamiento entre dos puntos en un conjunto de elementos, tal que cualquier par de puntos del conjunto están a una cierta distancia asignada por dicha función; este tipo de estructura matemática es un tipo de espacio topológico con la característica de poseer una formalización de la ordenación de los elementos de un conjunto propia, así como de su convergencia, continuidad, conectividad y su entorno[31] (matemáticamente se diría que se está hablando de una relación binaria de orden parcial[32] -para el caso, los elementos representan los puntos que conforman el intervalo que comprende una determinada área-) a manera de pares ordenados[33], vale decir, no es más que lo que se conoce en Matemáticas como especialización de un espacio topológico. Como puede observarse, todo espacio métrico será a su vez un espacio topológico porque cualquier función de distancia definida sobre un conjunto dado conlleva a una topología sobre el conjunto en cuestión, es decir, a formalizar la ordenación de los elementos del conjunto, su convergencia, continuidad, conectividad y entorno de una forma específica (ello se logra en los espacios métricos,

[29] Conjunto en el que todos y cada uno de sus elementos están rodeados por elementos que también pertenecen al conjunto.
[30] Es el otro conjunto que contiene todos los elementos que no están en el conjunto original. Por ejemplo, si se habla de los números enteros que pertenecen a su vez a los números reales, el conjunto cerrado del conjunto abierto representado por los números pares, serían los números impares.
[31] Un entorno de un punto es un conjunto que contiene al punto en donde uno puede estar tan próximo como se quiera al punto aludido. Por su parte, tanto de los conceptos de convergencia y continuidad, se asume que el lector está ya familiarizado y el concepto de conectividad se explicará a continuación.
[32] Este orden no necesariamente debe ser total, pues no se necesita que se puedan comparar unos con otros todos los elementos del conjunto. Por supuesto, esto puede suscitarse en algunos casos, pues el orden total es un caso particular del orden parcial.
[33] Llamada también relación binaria, como se explicará más adelante.

como se dijo anteriormente, asociando al conjunto una función distancia que regule el comportamiento entre dos puntos del conjunto de elementos en cuestión). Claros ejemplos de relaciones binarias de orden total son:

a) El conjunto de los naturales con su orden usual[34].
b) El conjunto de los enteros con su orden usual.
c) Un subconjunto finito $\{1, 2, \ldots, n\}$ de los naturales.

Como se comprenderá más adelante, son relaciones binarias de orden total precisamente aquellas que se refieren al comportamiento de los números reales requerido para la utilización de los distintos marcos teóricos que hacen posible desarrollar el Teorema Fundamental del Cálculo a través del Principio de Inducción Matemática.

La métrica que interesa en esta investigación, es aquella regulada por el Quinto Postulado de Euclides[35]. Esta métrica euclidiana significa que, en un conjunto de elementos, la distancia entre dos puntos determinados (la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente[36]) de ese conjunto deberá cumplir con la métrica euclidiana que determinará su distancia. A nivel del Cálculo Integral, estos dos elementos (puntos) de un conjunto $\mathbb{R}$ serán a y b.

[34] Aquí se hace referencia a la relación $\leq$.
[35] Euclides escribe en el Libro I de "Elementos" lo siguiente: "Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos." (Euclides, 1991). Lo anterior, a nivel del Cálculo, implica que si la recta tangente y la recta normal son perpendiculares entre sí (que al cortarse tales entes geométricos generan un ángulo de 90 grados), serán también paralelas y tendrán la misma pendiente.
[36] En la tercera definición de la primera página de su obra, dice Euclides: "Los extremos de una línea son puntos." (Euclides, 1991).

X.III Conjunto Conexo

Es un subconjunto[37] de un espacio topológico que no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos del espacio topológico en cuestión. Lo anterior significa que, si separamos el espacio topológico en dos conjuntos abiertos, es decir, que los extremos de cada nuevo conjunto (resultado de la separación) no se incluyan en estos dos conjuntos, al volverlos a unir el resultado es equivalente al conjunto original y, además, esta intersección es vacía (que no tienen elementos comunes entre sí), lo cual no se cumple simultáneamente, es decir, si se separan en dos subconjuntos, es posible lograr que al intersecarlos (volvernos a unir) el resultado sea un conjunto vacío, pero solo a costa que se omita algún punto de los originales, por lo cual no se vuelve al conjunto original; por otro lado, es posible volver al conjunto original, pero solo a costa de no omitir ninguno de los puntos originales, por lo cual su intersección no sería un conjunto vacío.

En secciones anteriores se vio el Axioma de Completitud, que garantizaba también la continuidad de los números reales en un intervalo, por lo que ahora se comprende que, dado que los números reales son un conjunto conexo, fue posible plantear el Axioma de Completitud y con ello, que existe una mínima cota superior L.

Formalmente y recordando lo planteado anteriormente, un conjunto conexo es un subconjunto de $C \subseteq X$ de un espacio topológico (X, T) que no puede ser descrito como una unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos de la topología, en donde T es la colección de conjuntos abiertos del espacio topológico. En otras palabras, está formado por una sola pieza y no es divisible.

[37] Además de ser también un subespacio, pues dado un espacio vectorial V, se dice que un subconjunto no vacío $U \subseteq V$, es un subespacio vectorial de V cuando al restringir las operaciones de suma y multiplicación por escalares (constantes) para V a U, este es un espacio vectorial.

X.III.I Propiedades de los Conjuntos Conexos

Para lo expuesto anteriormente, deben cumplir las siguientes propiedades:

a) $A, B \in T, A \cap B \cap C = \emptyset, C \subseteq A \cup B \Rightarrow C \subseteq A \vee C \subseteq B$
b) Si $C = X$, entonces se tendrá que X es conexo si y solo si $A, B \in T, A \cap B = \emptyset, A \cup B = X \Rightarrow A = X \vee B = X$. Aquí se tiene lo que se denomina espacio topológico conexo.

X.IV Conjunto Convexo

Un conjunto es convexo si al formar el segmento que une a dos puntos pertenecientes al conjunto, el segmento formado pertenecerá a dicho conjunto. Relacionado al tema sobre el que versa la presente investigación, si unimos en el primer cuadrante del plano cartesiano cualesquiera dos puntos (esa unión sería el segmento), se obtendrá un intervalo que pertenecerá a los números reales comprendidos en ese primer cuadrante.

Por tanto, los números reales son un tipo de espacio topológico, en el cual su métrica obedece a la geometría euclidiana, que gracias a ello es un conjunto convexo y, por consiguiente, un conjunto conexo, pues convexidad implica conectividad, es decir, todo conjunto convexo es conexo[38], lo cual se verá a continuación.

Se sabe que todo par de puntos a, b en un intervalo determinado pueden unirse por un segmento rectilíneo representado por v (esto se sabe gracias a la métrica euclidiana expuesta anteriormente). Ahora bien, este segmento rectilíneo debe poder parametrizarse (modelarse a través de una función paramétrica), es decir, ser representado a través de valores que recorran el intervalo que lo comprende, mediante un parámetro (una constante que puede ser variable), considerando cada coordenada de un punto

[38] La afirmación recíproca es falsa.

comprendido en el segmento rectilíneo en cuestión como una función dependiente del parámetro.

Por definición, v puede parametrizarse mediante la función $v(t) = a + t(b - a)$ en el intervalo [0,1][39], pues si se tiene un intervalo comprendido de a hacia b, se puede decir que ese segmento rectilíneo representado por el intervalo está siendo representado mediante valores que lo recorren, los cuales se encuentran en función de un parámetro. Así se tendrá:

$$v_0(t) = a + 0(\mathrm{b} - \mathrm{a}), v_1(t) = a + 1(\mathrm{b} - \mathrm{a}), \dots, v_t(t) = a + t(\mathrm{b} - \mathrm{a})$$

Como se observa, t es una constante que va cambiando de valor a medida recorre el intervalo y, además, como $v = v(t)$, es decir, v es igual a la ecuación evaluada en t, significa que la parametrización es continua en el intervalo. Además, ocurre otro hecho, y es que cada par de puntos pueden ser unidos mediante una curva o "conectados por un camino", lo que gracias a la métrica cartesiana significa que existe una conexidad por caminos o conexidad por arcos.

Finalmente, es necesario hacer un último señalamiento. Compárese la ecuación paramétrica planteada anteriormente y compárese la ecuación dada en la sección *VII.III*:

$$x_0 = a + 0\left(\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}\right), x_1 = a + 1\left(\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}\right), \dots, x_k = a + k(\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}})$$

$$v_0(t) = a + 0(\mathrm{b} - \mathrm{a}), v_1(t) = a + 1(\mathrm{b} - \mathrm{a}), \dots, v_t(t) = a + t(\mathrm{b} - \mathrm{a})$$

Es posible observar que $t = \frac{k}{n}$, es decir, el parámetro de la función con la que se realiza la partición a la función escalonada en cuestión y no solo eso, también que ambas ecuaciones son equivalentes. Por lo que resulta evidente que la ecuación que modela el

[39] Puede ser cualquier intervalo, sin embargo, también siempre se puede normalizar y llevar al intervalo planteado aquí.

comportamiento de los subintervalos comprendidos en el intervalo $[a, b]$ es paramétrica y sus cimientos teóricos se encuentran en el Análisis Funcional, pues este se encarga de estudiar este tipo de espacios.

XI. TEOREMA DE ROLLE

"La esencia no es sino pura identidad y apariencia en sí misma, en cuanto es la negatividad relativa a sí misma, y, por consiguiente, el rechazarse a sí de sí misma; implica, pues, esencialmente la determinación de la diferencia." (Hegel, 2006)

Michel Rolle

Lo que este teorema plantea es, a nivel intuitivo, que existe un punto al interior de un intervalo abierto para el cual la derivada de una función, que puede ser sometida a tal operación, se anula cuando el valor de ésta en los extremos del intervalo es el mismo. Es decir, los extremos siendo los mismos, pero mediados por la negatividad que los hace diferentes entre sí siendo idénticos (la negatividad relativa a sí misma), se anulan, lo que significa que la esencia, el valor al que equivalen ambos extremos del intervalo, se rechaza a sí de sí misma.

Si f es una función continua, definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces:

Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

X.I Demostración Matemática

Se sabe que existen tres posibilidades:

a) La función que se considere es constante.
b) Tiene algún punto x donde el valor de la función es mayor
c) Tiene algún punto x donde el valor de la función es menor.

Para el primer caso es trivial que en algún punto la función posee una derivada nula[40].

Gracias a la continuidad de f, la imagen de $[a, b]$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R}$, y por tanto es un intervalo, el intervalo de la imagen.

La imagen bajo una función continua de un conjunto compacto es un conjunto compacto, y por lo tanto el intervalo imagen es cerrado y de longitud finita: es de forma $[m, M]$, con m el valor mínimo de f y M su valor máximo.

Si $m = M$, la función es constante, y cualquier punto c de (a, b) conviene. Descartado este caso, $m \neq M$ significa que uno de los dos no es igual a $f(a) = f(b)$. Si se supone que sea M, entonces $\mathrm{M} > f(a) = f(b)$, por tanto, el máximo M está alcanzado en el interior del intervalo.

Sea c en (a, b), tal que $f(c) = M$. Por definición del máximo, $\mathrm{M} = f(c) \geq f(x)$ para todo x de (a, b). entonces el cociente $\frac{[f(c) - f(x)]}{c - x}$ es positivo cuando $x < \mathrm{c}$[41], y es negativo cuando $x > c$[42]. Pero la $f'(c)$ es por definición el límite de este cociente cuando $x \rightarrow c$[43].

Quod erat demonstrandum

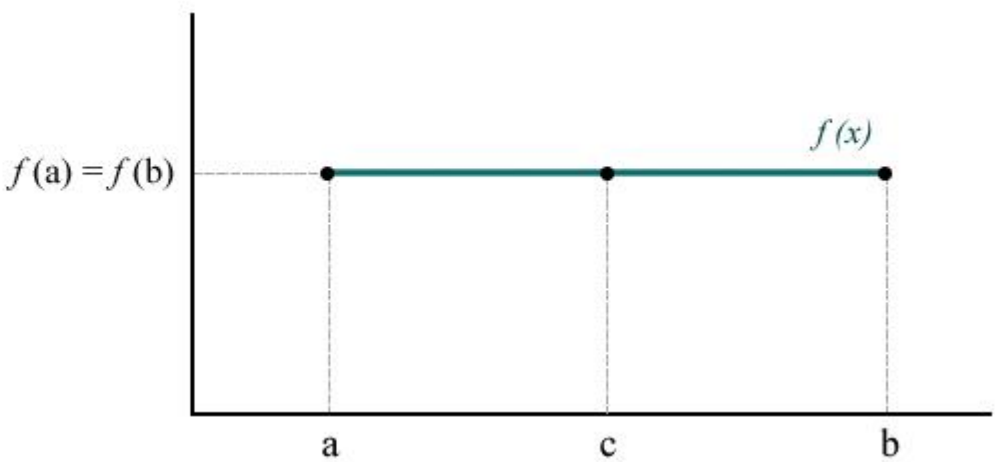
La demostración es muy similar si es el mínimo que está alcanzando (a, b).

[40] Esto significa que en la derivada por definición el cociente incremental es cero, es decir, $\Delta \mathrm{x} = 0$.
[41] Porque su numerador es siempre positivo y su denominador es positivo no nulo.
[42] El denominador se vuelve negativo no nulo.
[43] El límite por la izquierda debe ser igual al límite por la derecha.

X.II Demostración Gráfica

En el siguiente gráfico se observan las tres condiciones: a) la función es continua en el intervalo $[a, b]$, es derivable en el intervalo (a, b) y los valores que toma la función en los puntos a y b son iguales, es decir, $f(a) = f(b)$.

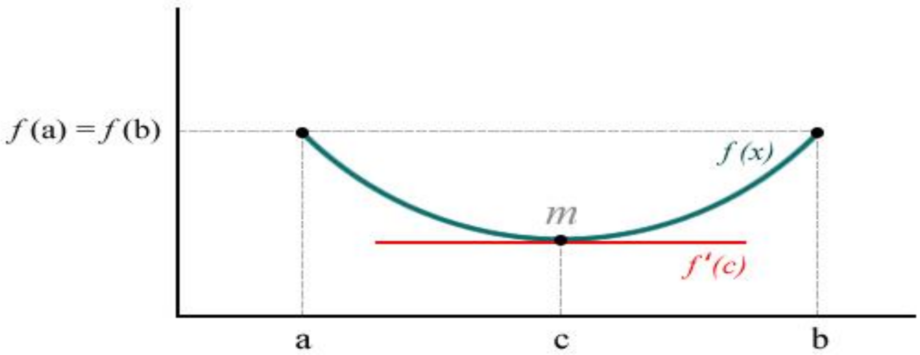
Existe, por lo tanto, al menos un punto c que pertenece al intervalo (a, b) en el cual la derivada de la función es igual a cero. Vale observar que c es distinto de a y b. No se debe confundir c con $f(c)$, que si puede ser igual a $f(a)$ y $f(b)$.



En el grafico anterior se ve una función constante, pero el Teorema no solo se cumple en este caso. Se pueden dar tres casos en los que $f(c)$ es distinto de $f(a)$ y $f(b)$.

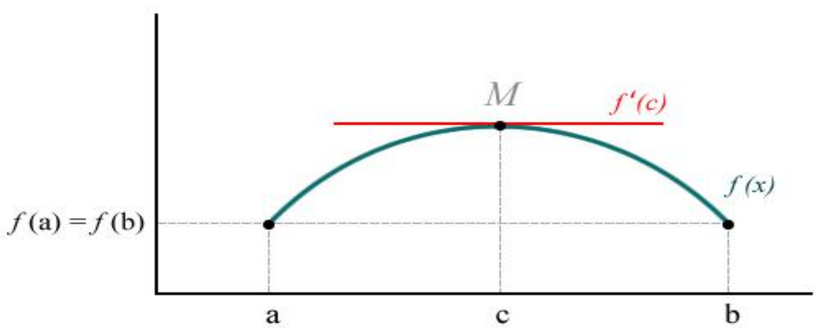
X.II.I Caso 1

El punto máximo es igual a $f(a)$ y $f(b)$,y el punto mínimo es distinto de ambos, lo cual implica que la curva es convexa. El punto mínimo es $m = f(c)$, y la derivada de la función en este punto es 0.



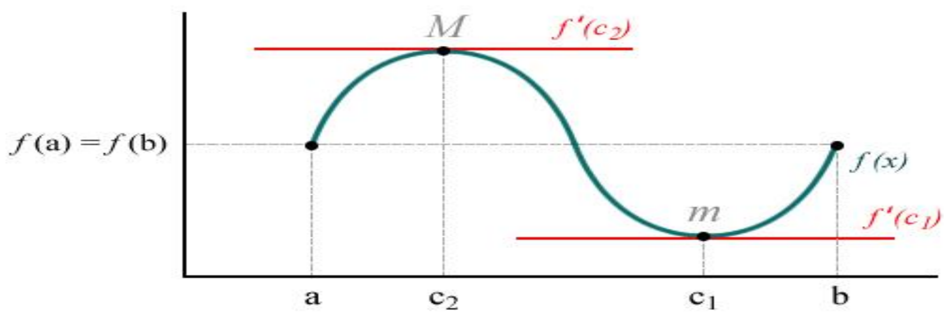
X.II.II Caso 2

El punto mínimo es igual a $f(a)$ y $f(b)$, y el punto máximo es distinto de ambos, lo cual implica que la curva, es cóncava. El punto máximo es $m = f(c)$, y la derivada de la función en este punto es 0.



X.II.III Caso 3

Tanto el punto mínimo como el punto máximo son distintos a $f(a)$ y $f(b)$. Esto significa que dentro del intervalo $[a, b]$ la función alcanza un punto máximo $M = f(c_2)$ mayor al valor de la función en los extremos a y b en un punto mínimo $m = f(c_1)$ menor a las mismas. Tanto en el punto máximo como en el punto mínimo, la derivada de la función es nula. Es decir,$f'(c_1) = 0$ y $f'(c_2) = 0$.



El Teorema de Rolle demuestra la existencia de un punto interior en un intervalo abierto para el cual la derivada de una función derivable se anula cuando el valor de esta, en los extremos de los intervalos, es el mismo[44].

XII. TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

"La cosa es la totalidad en cuanto desarrollo, puesto en un solo término, de las determinaciones del fundamento y la existencia. Según uno de sus momentos, esto es, de la reflexión en otro, tiene en sí las diferencias por las cuales es una cosa determinada y concreta." (Hegel, 2006)

Este teorema plantea que si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a, b]$. Donde $f(c)$ es el valor máximo absoluto y $f(C)$ es el valor mínimo absoluto tal que $C \wedge c \in [a, b]$.

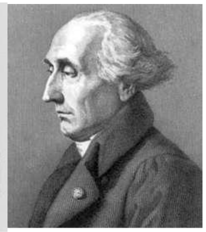
En secciones posteriores se verá el papel fundamental que juega en el camino hacia el Teorema Fundamental del Cálculo, específicamente al formular la Integral por Definición.

XIII. TEOREMA DE BONNET-LAGRANGE

"La cantidad sigue siendo unidad en cuanto en ella está la determinación en general, y ésta hay que ponerla como contenida en ella. Así es límite, y la cantidad es esencialmente cuanto." (Hegel, 2006)

[44] Es generalizado mediante el teorema de valor medio; del cual el teorema de Rolle es un caso especial.

Pierre Bonnet



Joseph-Louis Lagrange

El Teorema de Rolle visto dos secciones atrás se encuentra contenido en este teorema, ya que el mismo es la generalización del primero. Este teorema, también llamado Teorema del Valor Medio, es una propiedad de las funciones derivables en un intervalo. Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $[b, f(b)]$ y $[a, f(a)]$. Es decir:

$$\frac{f(b)\ -\ f(a)}{b-a} = f'(c)$$

XII.I Demostración

XII.I.I Caso 1

Primero se consideran dos puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$ pertenecientes al gráfico de la función. La creación de la recta que pasa por estos dos puntos es:

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Se define una función auxiliar:

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

Puesto que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), lo mismo se puede decir de g. Además, g satisface las condiciones del Teorema de Rolle en $[a, b]$, ya que:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 = g(b)$$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

Por el Teorema Rolle, como g es derivable en (a, b) y $g(a) = g(b)$, existe un c perteneciente al intervalo (a, b), tal que $g'(c) = 0$. Y, por lo tanto:

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Y así:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quod erat demonstrandum

XII.I.II Caso 2

Sea m_{ab} la pendiente de la recta secante entre $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$, se define la ecuación punto-pendiente:

$$y = m_{ab}x + b$$

$$m_{ab} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O también:

$$-m_{ab}x + y = c_1$$

De acuerdo al enunciado, la función es derivable en (a, b), por lo que se puede escoger algún valor $x = c$ en dicho intervalo tal que $f'(c)$ existe y es la pendiente de la recta tangente en dicho punto y por ende la recta tangente tiene la forma (punto-pendiente):

$y = f'(c)x + c_2$, o también $-f'(c)x + y = c_2$

Se observa que se llega a un sistema lineal 2x2:

$$-m_{ab}x + y = c_1$$

$$-f'(c)x + y = c_2$$

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} -m_{ab} & 1 \\ -f'(c) & 1 \end{pmatrix}$$

Y su determinante es:

$\det(A) = f(c) - m_{ab}$

Para que el sistema no tenga solución se debe cumplir $\det(A) = 0$, por lo tanto, las rectas son paralelas en $x = c$, es decir, $f(c) = m_{ab}$.

Entonces existe al menos un punto que no da solución al sistema y además la recta tangente al mismo es paralela a la recta entre a y b, es decir:

$f'(c) = m_{ab}$ o también $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Quod erat demonstrandum

XIV. DIFERENCIAS ENTRE LAS CONDICIONES DEL TEOREMA DE ROLLE Y LAS CONDICIONES DEL TEOREMA BONNET-LAGRANGE

"De este modo, ambos son la contradicción puesta; ambos son en sí lo mismo." (Hegel, 2006)

Como se mencionó anteriormente, el Teorema de Bonnet-Lagrange no es más que la generalización del Teorema de Rolle, por lo que a continuación se procederá a mostrar explícitamente las diferencias entre las condiciones que exige cada teorema para ser aplicado y con ello mostrar el por qué uno es la generalización del otro.

XIII.I Condiciones del Teorema de Rolle

1) Debe ser continua en $[a, b]$
2) Debe ser diferenciable en $(a, b) \Rightarrow \exists c \epsilon (a, b) / f'(c) = 0$ [45]
3) $f(a) = f(b)$[46]

XIII.II Condiciones del Teorema Bonnet-Lagrange

1) Debe ser continua en $[a, b]$
2) Debe ser diferenciable en $(a, b) \Rightarrow \exists\ c\ \epsilon\ (a, b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [47]

XV. CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD

"La diferencia entre las magnitudes continuas o discretas, y las extensivas e intensivas, consiste, por tanto, en que las primeras se refieren a la cantidad en general, mientras las segundas se refieren en cambio al límite o determinidad de la cantidad como tal." (Hegel, 2006)

XIV.I Continuidad en un Punto

Sea f una función definida de A en $\mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$. Y sea $x_0 \in A$, se dice que f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Esto implica:

[45] Tanto la primera como la segunda condición garantizan que la primera derivada de la función sea igual a cero, lo cual significa gráficamente que la recta tangente a ese punto es horizontal. En esto consiste el Teorema de Rolle.
[46] Esto significa que la función evaluada en los valores extremos debe arrojar el mismo resultado.
[47] La igualdad anterior significa que hay un punto $P(c, f(c))$ que está entre $P(a, f(a))$ y $P(b, f(b))$ donde la recta tangente a la función en ese punto es paralela a la recta secante que une los puntos del extremo del intervalo. El punto $P(c, f(c))$ es un punto que pertenece al intervalo (a, b) en el cual la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta secante.

1) $f(x)$ tiene límite cuando $x \to x_0$.
2) Una función f de A en $\mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice continua en el punto x_0 de A, si para todo $\mathcal{E} > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que x_0 pertenezca a A y $|x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}$.
3) La condición necesaria y suficiente para una función de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, sea continua en el punto x_0 perteneciente a A es que para toda sucesión x_n tal que $x_n \in A$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ se tenga que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$

Si f es continua en todos los puntos del intervalo, es continua en tal intervalo.

XIV.II Generalización de la Continuidad en un Punto

La función $f(x)$ definida sobre $[a, b]$ o $[a, b)$ es continua a la derecha del punto a, si $f(x)$ admite un límite a la derecha del punto a y coincide con el valor de $f(a)$. Además, la función $f(x)$ definida sobre $[a, b]$ o $(a, b]$ es continua a la izquierda del punto b, si $f(x)$ admite un límite a la izquierda del punto b y coincide con el valor de $f(b)$.

Si f es continua a la derecha y a la izquierda de un punto x_0 entonces es continua en x_0.

XIV.III Continuidad Uniforme de una Función Sobre un Intervalo J

En general δ depende de x_0 y $\mathcal{E}$. Sin embargo, puede ocurrir que el estudiar la continuidad en un intervalo y una vez prefijado $\mathcal{E} > 0$, el valor de δ que se obtenga sirva para todos los puntos de dicho intervalo, dependiendo solo del valor prefijado $\mathcal{E}$.

Cuando esto ocurre se dice que la función es uniformemente continua en el intervalo.

XIV.III. I Definición

Se dice que una función f definida en un intervalo J es uniformemente continua en J cuando para todo $\mathcal{E} > 0$ se pueda hacer corresponder un $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos x' y x'' de J que cumplen la condición que $|x' - x''| < \delta$ se verifique que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

La continuidad uniforme en J implica la continuidad ordinaria en cada punto I como se deduce fácilmente formando $x'' = x_0$.

Sin embargo, una función puede ser continua en un intervalo sin ser uniformemente continua.

XVI. SUMAS DE RIEMANN SUPERIORES E INFERIORES

"Estos dos tránsitos: de la cualidad al cuanto y de éste otra vez a aquella, pueden ser representados como progreso infinito, como el suprimir y el restaurar la medida en lo desmesurado." (Hegel, 2006)

Arquímedes de Siracusa

XV.I Definición

Para aproximar el área de una región, se subdivide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Con lo que se obtienen los siguientes puntos terminales:

$\mathrm{a} + 0(\Delta\mathrm{x}) < \mathrm{a} + 1(\Delta\mathrm{x}) < \mathrm{a} + 2(\Delta\mathrm{x}) \ldots < \mathrm{a} + \mathrm{k}(\Delta\mathrm{x}) = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k$

Como f es continua, el Teorema del Valor Extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo de $f(x)$ en cada subintervalo[48].

$f(m_k)$ = Valor Mínimo de $f(x)$ en el $k-ésimo$ subintervalo. A su vez, también representa la altura del $k-ésimo$ rectángulo inscrito[49].

$f(M_k)$ = Valor Máximo de $f(x)$ en el $k-ésimo$ subintervalo. A su vez, también representa el $k-ésimo$ rectángulo circunscrito[50].

Por tanto:

$f(m_k) \leq f(M_k)$

Definiendo la desigualdad anterior como sumas:

---

[48] El Teorema del Valor Extremo es un teorema de existencia, es decir, un enunciado involucrando el cuantificador existencial ∃ (antepuesto a una variable para decir que "existe" al menos un elemento del conjunto al que hace referencia la variable, que cumple la proposición escrita a continuación en el enunciado). Lo anterior significa que el teorema en cuestión se vale del cuantificador existencial para garantizar un valor mínimo y un valor máximo en cada subintervalo, con lo cual está garantizando que sea posible construir los n rectángulos representativos utilizados en las Sumas Inferiores (o por Defecto) y las Sumas Superiores (o por Exceso); sin embargo, no es cualquier aspecto de esta construcción la que garantiza este teorema, sino solamente la altura de estos rectángulos, pues el ancho se garantiza a través de la continuidad del intervalo. Por otra parte, la altura de los rectángulos la determina la función (y su altura específica, el comportamiento de la función), así como el ancho de los mismos lo determina la norma de partición. Vale aclarar que este teorema no determina específicamente los valores a los que equivalen esos máximos y mínimos en cada subintervalo, solo garantiza su existencia y que de no encontrarse ambos o alguno de ellos dentro del subintervalo k, se encontrarán en los extremos del subintervalo en cuestión. Por supuesto, tanto por exceso como por defecto, las alturas de los n rectángulos representativos serán diferentes y precisamente estas diferencias proporcionales entre sí son las que permiten que ambas sumas sean vistas entre sí como dos componentes que al compensarse mutuamente hagan que el error de aproximación al área real tienda a cero, siempre que el número de rectángulos representativos tienda hacia el infinito.

[49] Los rectángulos inscritos de $f(x)$ son aquellos cuya área es menor que el área bajo la curva de $f(x)$.

[50] Los rectángulos circunscritos de $f(x)$ son aquellos cuya área es mayor que el área bajo la curva de $f(x)$.

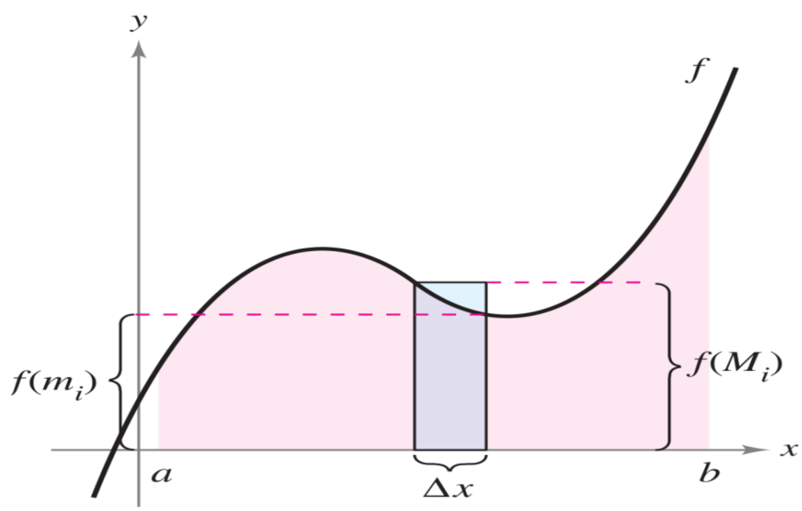
$$\sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x \leq \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x$$

Lo anterior equivale a decir que la suma inferior de los rectángulos inscritos deberá ser menor o igual a la suma inferior de los rectángulos circunscritos en el área bajo la curva que describa la función $f(x)$.

Por tanto:

$$\sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta \mathrm{x} \leq \text{Área de la Región} \leq \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta \mathrm{x}$$ [51]

XV.I.I Representación Gráfica[52]



[51] Nótese que la altura mínima estará determinada por la función, es decir, donde esta encuentra su mínimo relativo y no por el extremo izquierdo del intervalo; a su vez la altura máxima estará determinada por la función también, es decir, donde esta encuentra su máximo relativo y no por el extremo derecho del intervalo. El máximo relativo será el punto en que la función alcance su mayor valor dentro de la región acotada; por su parte, el mínimo relativo será el punto en que la función alcance su menor valor dentro de la región acotada. Por eso son relativos, relativos a la región acotada.

[52] Tanto i como k son equivalentes.

Lo anteriormente expuesto no significa más que dentro de la misma gráfica de una determinada función va implícito que al comenzar a trazar los rectángulos representativos partiendo de la altura máxima que alcanza la función f se obtendrá un área superior el área real y, por su parte también que al comenzar a trazar rectángulos representativos partiendo de la altura mínima que alcanza la función f se obtendrá un área inferior al área real, sin embargo, los excesos del área superior al área real tenderán a compensarse con los defectos del área inferior al área real, si y solo si el número de rectángulos representativos tiende a ser infinito o, lo que es lo mismo, si la norma de partición del ancho de cada uno de esos rectángulos tiende a ser cero.

XVII. APROXIMACIÓN A LA INTEGRAL DE RIEMANN PARA SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

"Lo infinito, la afirmación como negación de la negación, tenía, pues, en lugar de los lados abstractos del ser y de la nada, de lo algo y de lo otro, etcétera, como sus lados, la cualidad y la cantidad." (Hegel, 2006)

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Como f es acotada en $[a, b]$, lo es también en cada subintervalo $[x_k, x_{k-1}]$, alcanzando un valor máximo y un valor mínimo en cada uno de ellos.

Sea:

$$M_k = Valor\ Máximo\ de\ f\ para\ x \in [x_k, x_{k-1}], k = 1,2,3, \dots, n$$

$$m_k = Valor\ Mínimo\ de\ f\ para\ x \in [x_k, x_{k-1}], k = 1,2,3, \dots, n$$

Se llama Suma Inferior de Riemann para la partición P, al número $\sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1})$ y se denota por $\underline{S_n}$ o $\underline{S}(f, P)$.

Se llama Suma Superior de Riemann para la partición P, al número $\sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})$ y se denota por $\overline{S_n}$ o $\overline{S}(f,P)$.

Sabiendo que $m_k \leq M_k$, por tanto:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})$$

Donde $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ y $\underline{S_n} \leq \overline{S_n}$[53].

A su vez, si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada en el intervalo $[a,b]$, se dice que es integrable según Riemann sobre $[a,b]$ si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n}$$

Esto es:

$$Sup_{(p)}\underline{S_n}(f,P) = Inf_{(p)}\overline{S_n}(f,P), P\ partición\ de\ [a,b]$$

Este número, si existe, se llama Integral de Riemann de $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f(x)\Delta x$. Teniendo:

a) $\underline{S_n} \leq \int_a^b f(x)\Delta x \leq \overline{S_n}$

[53] A $\underline{S_n}$ y $\overline{S_n}$ se les conoce como Sumas de Darboux. esta integral es equivalente a la integral de Riemann. En el área de Análisis Matemático, la integral de Darboux, es una forma de abordar el problema de la integración. El enfoque de la integral de Darboux se utiliza en varios textos (aunque en varios no se le nombra así, simplemente se le da el nombre de integral o integral de Riemann utilizando el procedimiento de Darboux), en vez de usar la integral de Riemann ya que es más simple de definir que la integral de Riemann e incluso de utilizar. Es más simple de usar que la integral de Riemann por dos razones: la primera razón es que nada más considera dos sumas para cada partición, mientras que en la integral de Riemann se considera una infinidad de sumas para cada partición; la segunda razón es que esta definición permite establecer cotas superiores e inferiores de la integral, lo que reditúa en demostraciones más sencillas.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_n} = \int_a^b f(x)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n}$

Lo que conlleva a: $Sup_{(p)}\underline{S_n}(f,P) = \int_a^b f(x)\Delta x = Inf_{(p)}\overline{S_n}(f,P)$[54][55]

XVIII. LA INTEGRAL DE RIEMANN COMO LÍMITE DE SUMAS

"El ser no ha desaparecido, sino que, primeramente, la esencia, como simple relación de sí misma, es el ser; pero, de otra parte, el ser, según su determinación unilateral de inmediatez, es reproducido a algo solamente negativo, a una apariencia. La esencia es, por tanto, como un aparecer en sí mismo. (Hegel, 2006)

Karl Weierstraß

[54] La expresión $Sup_{(p)}\underline{S_n}(f,P)$ representa el supremo de las sumas inferiores de Riemann resultado de la partición más fina de P. A su vez, la expresión $Inf_{(p)}\overline{S_n}(f,P)$ representa el ínfimo de las sumas superiores de Riemann resultado de la partición más fina de P. La primera representa la mayor área resultante en la suma inferior utilizando la partición más fina posible y la segunda es la menor área resultante en la suma superior utilizando la partición más fina posible. Por tanto, para que el área de una función escalonada pueda ser encontrada, es necesario que, utilizando la partición más fina posible, tanto en una suma superior como en una suma inferior, los valores de las áreas calculadas en cada una de las sumas sean los mismos.

[55] Lo que se busca es encontrar la mayor de las sumas inferiores ($Sup_{(p)}\underline{S_n}(f,P)$) y la menor de las sumas superiores ($Inf_{(p)}\overline{S_n}(f,P)$), pues el área real se encontrará en medio de esos dos valores en cuestión. Esto es resultado de la comparación de las sumas inferiores y las sumas superiores. Por tanto, en esa comparación se encontrará el área real en medio de los valores antes mencionados, pues el área de los rectángulos por un lado es menor (en $\underline{S_n}$) y por el otro es mayor (en $\overline{S_n}$), es decir, entre el mayor valor de las sumas que representan un área menor al área real (suma inferior) y la menor de las sumas que representan un área mayor al área real (suma superior). Lo anterior significa que se está en presencia de una sucesión de sumas parciales menores ($\underline{S_n}$) y otra sucesión de sumas parciales mayores ($\overline{S_n}$), por tanto, se tendrá en medio de tales sucesiones aquella sucesión de sumas parciales que equivale al área real.

XVII.I Definición

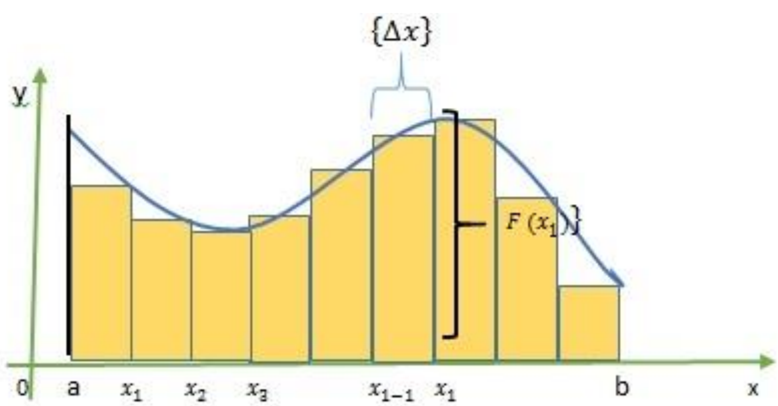
Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $\mathrm{P} = (\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ una partición de $[a,b]$. De cada uno de los subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ determinados por P se elige un punto al azar, sean $C_1, C_2, \dots, C_n$ arbitrarios, entonces:

$$\int_a^b f(x)\Delta x \ \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

Se llama Suma de Riemann de f con respecto a P y se denota por S_n o $S(f,P)$:

$$\begin{aligned} S_n = S(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

XVII.II Representación Gráfica



Si f es integrable, dichas sumas constituyen una buena aproximación de $\int_a^b f(x)\Delta x$, dando por sentado que la partición de $[a,b]$ se encuentre suficientemente afinada.

XIX. INTEGRACIÓN POR DEFINICIÓN

"EL CONCEPTO ES LO que es libre, es el poder sustancial existente por sí, y es totalidad, puesto que cada uno de los momentos es todo el concepto, y es puesto con él en unidad inseparada. El concepto es, pues, lo que, en su identidad consigo, es en sí y por sí determinado." (Hegel, 2006)

Ahora bien, se procederá a estudiar la relación entre las Sumas Inferiores y las Sumas Superiores dentro del área bajo la curva.

Las sumas m_k y M_k representan las sumas inferiores y las sumas superiores, respectivamente. Tanto matemática como gráficamente, esto significa que el área de la región buscada bajo la curva se encuentre en algún punto entre la Suma Inferior y la Suma Superior.

XVIII.I Definición de una Integral

Se observa, recordando el Teorema del Encaje, que el límite de las sumas inferiores y las sumas superiores es el mismo, es decir, $\lim_{n\to\infty} s(n) = L = \lim_{n\to\infty} S(n)$.

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k = L$$

Además,

$$m_k \leq c_k \leq M_k$$

Por lo que la definición formal de una integral para funciones más generales que las escalonadas viene representada por:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \; = L$$

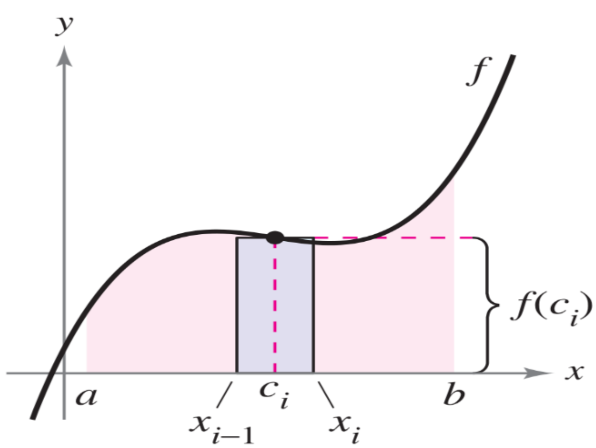
Dónde:

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k \;\wedge\; \|\Delta\| = \Delta \mathrm{x}_k = \frac{(b-a)}{n}$$

Aquí $f(x)$ debe ser continua y no negativa en el intervalo [a , b].

El área de la región delimitada por la gráfica $f(x)$ en el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es la definida anteriormente, donde n representa los $n - \acute{e}simos\ subintervalos$[56].

XVIII.II Representación Gráfica



[56] Nótese que m_k y M_k solo indican que se toma el área de los rectángulos inscritos y de los rectángulos circunscritos, respectivamente. A su vez, al poseer la misma tendencia en el límite, tanto la suma inferior como la suma superior convergerán al mismo valor L, lo que a su vez significa que no importa el valor de x que tomemos arbitrariamente en cualquier subintervalo, pues el límite no se verá afectado; lo anterior implica que se está en libertad de elegir cualquier valor de x en el $k - \acute{e}simo$ subintervalo de forma arbitraria, es decir, se está en libertad de empezar a construir los rectángulos representativos, tanto de la suma inferior como de la suma superior, a partir de cualquier valor que se desee que tome x. Por tanto, el valor de x se encontrará acotado por un extremo izquierdo x_{k-1} y un extremo derecho x_k, donde C_k será un valor que se encuentre entre ambos puntos.

XVIII.III Integrabilidad de una Función

Debe empezarse por plantear que una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ es integrable, es decir, que una función integrable sobre un intervalo es acotada[57].

Una función monótona[58] sobre $[a, b]$ es integrable y, por ser monótona sobre $[a, b]$ será acotada, ya que $f(x)$ pertenece a I. A su vez, una función acotada y continua en $[a, b]$, excepto en un numero finito de puntos, es integrable. Lo anterior equivale a que f es monótona a trozos en $[a, b]$.

XX. LA INTEGRAL DE RIEMANN

"El proceso del concepto no es ya el pasar ni el reflejarse en otro, sino que es el desarrollo *(entwicklung)*, porque las diferencias son puestas inmediatamente como idénticas entre sí y con el todo, y la determinidad es puesta como un ser libre del concepto total." (Hegel, 2006)

Bernhard Riemann

[57] Posteriormente se observará que el acotamiento de una función no escalonada entre funciones escalonadas es la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo para una gama más amplia de funciones, usando el Teorema del Encaje visto anteriormente. Este fue uno de los grandes aportes del brillante matemático alemán Bernhard Riemann a la Teoría Matemática. En su honor, se denominan a las Integrales Definidas en un intervalo $[a, b]$ como Integral de Riemann.

[58] Una función monótona es aquella cuyo comportamiento es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Como se demostrará más adelante, las Sumas de Riemann no son más que la base para una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo[59] para una gama de funciones más amplia.

Antes de proceder a exponer lo atinente a esta sección, cabe realizar algunas aclaraciones de manera precisa.

Dado lo visto en las secciones III y VII, la integral por definición posee dos restricciones. La primera es que los valores tomados por x en la serie infinita solo pueden ser valores enteros y, la segunda, es que la imagen de x debe tomar el mismo valor en cada subintervalo en que se encuentren particionadas las abscisas. Lo anterior no es más que decir que se requiere que $f(x)$ tenga el mismo valor a lo largo de cada subintervalo en que se encuentre particionada x, pues esta es la única manera de lograr que las figuras formadas en el área bajo la curva posea lados opuestos de igual longitud, es decir, es la única manera de formar los $n-\acute{e}simos$ rectángulos representativos.

Cada una de las restricciones posee diferente naturaleza. La restricción en x viene dada por la necesidad de poder generalizar la noción de suma aplicada a los términos de una sucesión, es decir, poder sumar una infinita cantidad de términos de manera eficiente; por su parte, la restricción en la imagen viene dada por la necesidad de poder formar $n-\acute{e}simos$ rectángulos representativos. Ambas restricciones vuelven muy limitada la gama de funciones a las que se les puede calcular un área y es precisamente ello lo que vuelve tan valioso el aporte de Riemann.

Finalmente, la integral por definición es una suma parcial de términos de una serie, por lo cual, su límite cuando el número de términos de la serie tiende a ser infinito, será la suma total de la serie en cuestión. ¿A qué serie pertenece?, pertenece a cualquier tipo de

[59] Aquí se hace referencia a la Integral por definición.

serie que cumpla con la condición de convergencia (cuya suma total exista) y que pueda expresarse como una función escalonada.

XIX.I Definición de la Integral de Riemann de una Función Acotada

Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$ y sea $s \wedge t$ funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a, b]$ tales que:

$s(x) \leq f(x) \leq t(x)$

Para cada x en $[a, b]$, si existe un numero I y solo uno, tal que:

$$\int_a^b s(x)\Delta x \leq I \leq \int_a^b t(x)\Delta x$$

Lo anterior significa que para cada par de funciones escalonadas s y t que verifican el escalonamiento realizado en la primera desigualdad, el valor I se denomina la integral de f desde a hasta b, la cual se indica por el símbolo $\int_a^b f(x)\Delta x$. Cuando I existe se dice que $f(x)$ es integrable en $[a, b]$. Al proceso que determina el valor I acotado en la última desigualdad se le llama Integral de Riemann, que no es más que una Integral Definida acotada entre dos funciones escalonadas.

Los números a y b se conocen como Límites de Integración, $[a, b]$ como Intervalo de Integración y $f(x)$ como Integrando[60].

---

[60] En síntesis, puede plantearse que se logra el tránsito del Teorema Fundamental del Cálculo aplicable solamente a funciones escalonadas hacia funciones más generales que las escalonadas acotando la función integrada (que no es escalonada) entre dos funciones escalonadas, pues solo las funciones escalonadas permiten que pueda ser utilizada la Inducción Matemática (al tomar los valores enteros positivos que se definan en las restricciones de cada uno de los trozos de la función, con lo cual se evitan los números decimales en los límites superiores e inferiores de las Sumas de Riemann -que no son más que series matemáticas, es decir, generalizaciones del concepto de suma en términos de una sucesión matemática-, como ya se vio anteriormente), cuya finalidad radica en volver posible calcular un área específica bajo la función en un intervalo determinado. Lo anterior, como ya había sido planteado, es posible al plantear las tres funciones utilizadas como límites gracias al Teorema del Encaje.

Considérese una función f no escalonada y funciones arbitrarias s y t escalonadas, que aproximan por defecto y por exceso la función f respectivamente, de modo que $s(x) \leq f(x) \leq t(x), x \in [a, b]$.

Los números $\int_a^b s(x)\,\Delta\mathrm{x}$ y $\int_a^b t(x)\,\Delta\mathrm{x}$[61] obtenidos al ir considerando s y t, los cuales de distintos modos satisfacen, por el Teorema del Encaje, la siguiente desigualdad:

$$\int_a^b s(x)\,\Delta\mathrm{x} < \int_a^b t(x)\,\Delta\mathrm{x}$$

Entonces la integral de f en $[a, b]$ tiene un número comprendido entre $\int_a^b s(x)\,\Delta\mathrm{x}$ y $\int_a^b t(x)\,\Delta\mathrm{x}$ para cada s y t funciones de aproximación para que se cumpla el Teorema del Encaje.

Si existe un único numero con esa propiedad, este I parece lógico tomarlo como la Integral por Definición de f en $[a, b]$. Por tanto:

$$\int_a^b s(x)\,\Delta\mathrm{x} \leq I \leq \int_a^b t(x)\,\Delta\mathrm{x}$$

Sin embargo, al tratar de definir la Integral es preciso restringirse a funciones que sean acotadas en $[a, b]$ pues de este modo es posible aproximarlas[62] superiormente e inferiormente a funciones escalonadas, cumpliéndose $\int_a^b s(x)\,\Delta\mathrm{x}$ y $\int_a^b t(x)\,\Delta\mathrm{x}$.

Tal condición resulta aún insuficiente, pues además debe de existir ese único número I que cumpla $\int_a^b s(x)\,\Delta\mathrm{x} \leq I \leq \int_a^b t(x)\,\Delta\mathrm{x}$.

[61] Como puede observarse, ambas son Integrales Definidas en un intervalo $[a, b]$.
[62] Aproximar las funciones con las que se realizará la acotación.

Por tanto, sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, f es integrable si dada cualquier sucesión normal de particiones $\{P_n\}$, la sucesión $\{S_n\}$ de Sumas de Riemann correspondiente es convergente a un límite I[63], se escribe: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = I = \int_a^b f(x)\Delta x$ [64].

XXI. TEOREMA BONNET-LAGRANGE DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

"La singularidad no se debe tomar en el sentido de singularidad inmediata, al modo que hablamos de cosas singulares o de hombres singulares (…) Cada momento del concepto es él mismo el concepto total." (Hegel, 2006)

XX.I Definición

Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$ entonces el valor medio de f en el intervalo es $\frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_a^b f(x)\Delta x$

Para saber por qué el promedio de f se define de esta manera, supóngase que se divide $[a, b]$ en n intervalos de igual anchura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Si c_k es cualquier punto en el $k-ésimo$ subintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los C_k está dada por:

$$a_n = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)]^{65}$$

Al multiplicar y dividir entre $(b-a)$ puede escribirse la media aritmética como:

$$a_{n=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) = \left(\frac{1}{b-a}\right)\sum_{k=1}^{\infty} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

---

[63] Independientemente de cómo se escojan los valores c_k.

[64] Los valores S_k escogidos para formar las Sumas de Riemann afectan el valor de cada una de tales sumas, pero no afectan el valor del límite de las sumas en cuestión. Por otra parte, si f es integrable entonces el valor de I es el mismo para cualquier sucesión normal de particiones.

[65] Esto representa el porcentaje de $f(c_1), \dots, f(c_n)$.

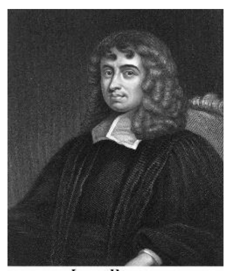
$$a_{n=}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{b-a}\right)=\left(\frac{1}{b-a}\right)\sum_{i=1}^{\infty} f(c_k)\,\Delta x_k$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$, como se indicó en la definición anterior.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es solo unas de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma.

XXII. PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

"Son dos juicios que en sí son idénticos, pero que no están puesto aún como idénticos." (Hegel, 2006)


Isaac Barrow

Todos los teoremas vistos en las secciones anteriores, así como también sus demostraciones, descubiertas aisladamente del Cálculo por sus respectivos autores, procedentes de distintas ramas de las matemáticas y con sus consiguientes valores científicos correspondientes a cada una de ellas, allanaron el camino para este momento. Los Leibniz, Euler, Gauss, Cauchy y otros hombres elevados al Olimpo de esta bella ciencia, marcaron la senda por la que Bernhard Riemann con una prodigiosa lucidez llevaría todas estas abstracciones del pensamiento de aquellos hombres al momento en que todas esas teorizaciones aisladas se volvieran un solo cuerpo teórico junto con el Cálculo, permitiendo la autosupresión de sus anteriores limitaciones y transitando al Teorema Fundamental del Cálculo más allá de las funciones escalonadas.

Aquí aún no se ha hecho explícita la relación entre la derivación y la integración, a pesar de encontrarse implícita en todo lo anteriormente planteado cuestiones referentes a rectas tangentes en los espacios definidos por la métrica euclidiana y del cambio en las alturas de los n rectángulos representativos ante variaciones infinitesimales de x de un punto a otro. Esto se volverá explícito cuando se llegue a la última sección de esta investigación.

Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$ entonces:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\Delta x$$

XXI.I Demostración

La clave consiste en escribir, la diferencia de forma conveniente, sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos de obtiene que:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n}[F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

De acuerdo con el Teorema del Valor Medio, se sabe que existe un numero C_k en el $k-$ é$simo$ subintervalo tal que:

$$F'(c_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Como $F'(c_k) = f(c_k)$ puede decirse que $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y obtenerse:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Esta importante ecuación dice que el aplicar repetidamente el Teorema del Valor Medio se puede encontrar una colección de c_k tal que la constante $F(b) - F(a)$ es una Suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. El hecho que la continuidad implique Integrabilidad garantiza que el límite de Sumas de Riemann sobre las particiones con $||\Delta|| \rightarrow 0$ existe.

Así, tomar al límite (cuando $||\Delta|| \rightarrow 0$) produce:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\Delta x$$

XXIII. TEOREMA DEL CAMBIO NETO

"El objeto diferenciado tiene una determinidad inmanente que constituye su naturaleza, y en la cual el objeto mismo tiene existencia." (Hegel, 2006)

Recordando el Teorema Fundamental del Cálculo que decía:

$$Primer\ Teorema\ Fundamental\ del\ Cálculo: \int_a^b f(x)\Delta x = F(b) - F(a) \ \Rightarrow F' = f$$

$$\Rightarrow Teorema\ del\ Cambio\ Neto: \int_a^b F'(x)\Delta x = F(b) - F(a)$$

Tal que:

$$Razón\ de\ Cambio\ de\ y = F(x)\ respecto\ a\ x: \int_a^b F'(x)\Delta x$$

$$Cambio\ Neto\ en\ y\ cuando\ x\ cambia\ de\ a\ hacia\ b: F(b) - F(a)$$

XXIV. TEOREMA DE BONNET-LAGRANGE EN EL CÁLCULO INTEGRAL[66]

"Toda cosa tiene su fundamento suficiente." (Hegel, 2006)

Augustin Cauchy

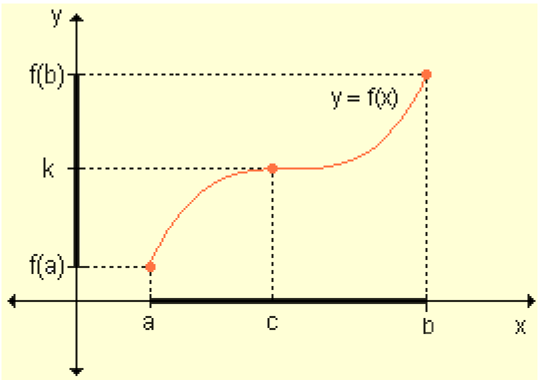
Recordando lo visto en secciones anteriores y teniendo $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, si una función es definida y continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y toma valores iguales en los extremos del intervalo, es decir, $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto c en el intervalo $[a, b]$ tal que la tangente de la curva c es horizontal, es decir, $f'(c) = 0$.

XXIII.I Teorema del Valor Medio Para Integrales

Establece que, en alguna parte entre los rectángulos inscritos (sumas por defecto) y circunscritos (por exceso), hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva que describe la función que se desea encontrar.

[66] Conocido también como Teorema del Valor Medio.

XXIII.I.II Representación Gráfica



Teorema del Rectángulo del Valor Medio: $f(c)\,(b-a) \;=\; \int_a^b f(x)\Delta x$

XXIII.II Primera Demostración del Teorema de Bonnet-Lagrange Aplicado al Cálculo Integral

XXIII.II.I Caso 1

Si f es constante en el intervalo $[a,b]$, el teorema es claramente válido debido a que c puede ser cualquier punto en $[a,b]$.

Quod erat demonstrandum

XXIII.II.II Caso 2

Si f no es constante en $[a,b]$ entonces por el Teorema del Valor Extremo pueden elegirse $f(m)$ y $f(M)$ como valores mínimo y máximo respectivamente, de f en $[a,b]$. Como $f(m) \leq f(x) \;\leq f(M)$ para todo x en $[a,b]$ se puede aplicar el Teorema del Valor Medio para escribir:

$$\int_a^b f(m)\Delta x \leq \int_a^b f(x)\Delta x \leq \int_a^b f(M)\Delta x$$

$$f(m)\,(b-a) \;\leq \int_a^b f(x)\Delta x \leq\; f(M)\,(b-a)$$

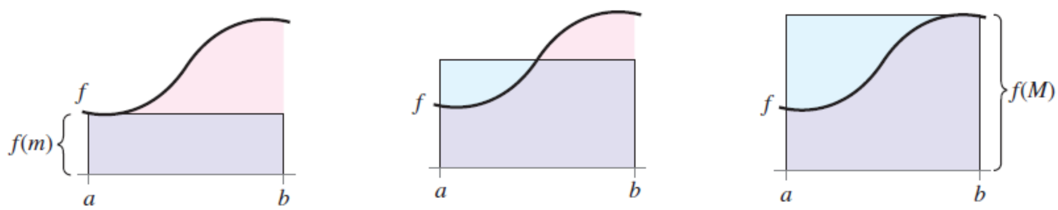
$$f(m) \leq (\frac{1}{b-a}) \int_a^b f(x)\Delta x \leq f(M)$$

De acuerdo con esta última desigualdad, puede aplicarse el Teorema del Valor Medio para concluir que existe algún c en $[a,b]$ tal que:

$$f(c) = (\frac{1}{b-a}) \int_a^b f(x)\Delta x \ o \ f(c)\,(b-a) = \int_a^b f(x)\Delta x$$

Quod erat demonstrandum

XXIII.II.III Representación Gráfica de la Demostración



Rectángulo inscrito (menor que el área real) $\int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b-a)$

Rectángulo del valor medio (igual al área real) $\int_a^b f(x)\,dx$

Rectángulo circunscrito (mayor que el área real) $\int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$

El valor de $f(c)$ dado en el Teorema del Valor Medio para Integrales recibe el nombre de Valor Medio de f en el intervalo $[a,b]$.

Segunda Demostración del Teorema de Bonnet-Lagrange Aplicado al Cálculo Integral[67]

$\int_a^b f(x)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} [\sum_{k=1}^{n} f(x_k)]$

La suma aloja todos los $x_k$dentro del intervalo $[a,b]$, por lo que se procede a escoger un $x_k = \mathcal{E}$ fijo de dicho infinito, y que por ende hace que $f(x_k) = f(\varepsilon)$.

Al reemplazar la integral queda de la siguiente manera:

[67] Aplicando Integración de Riemann.

$\int_a^b f(x)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}$ $\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon)$

Como $f(\varepsilon)$ es constante para la $\sum$, entonces:

$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon) = f(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} 1 = nf(\varepsilon)$

Reemplazando:

$\int_a^b f(x)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} [(\mathrm{n})f(\varepsilon)]$

Simplificando n:

$\int_a^b f(x)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} (b-a)\,[f(\mathcal{E})]$

Como $(b-a)$ y $f(\mathcal{E})$ no son afectadas por el límite, ya que son constantes, se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\Delta x = (\mathrm{b}-\mathrm{a})\, f(\mathcal{E})$$

Despejando $f(\mathcal{E})$:

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\Delta x$$

Por lo tanto, queda verificado la existencia de un $\mathcal{E} \in [a,b]$ en donde la función evaluada en este, toma el valor de $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,\Delta x$, es decir:

$$\ni \mathcal{E} \in [a,b]: f(\mathcal{E}) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\Delta x$$

Quod erat demonstrandum

XXV. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

"El pensamiento, como intelecto, se queda en la determinidad rígida y en su diferencia con otras determinaciones. Tal abstracción, para el intelecto, tiene valor de abstracción y existe de por sí. El momento dialéctico es la autosupresión de tales determinaciones finitas y su tránsito a las opuestas." (Hegel, 2006)

Gottfried Leibniz

Como escribió Marx alguna vez, Hegel dijo en alguna parte que los grandes hechos y los grandes hombres de la historia universal se repiten como si dijéramos dos veces, pero se le olvidó añadir que una vez como tragedia y la otra como farsa. De Napoleón I a Napoleón III, de Eva Perón a Cristina Fernández, de Sandino a Ortega y lo mismo sucede del Primer al Segundo Teorema Fundamental del Cálculo que, siendo consecuencia del primero, aunque presentándose como distinto de este, es a la vez la representación de la unidad de lo diferencial con lo integral.

Este teorema consiste, a manera intuitiva e introductoria, en expresar la derivación e integración de una función evaluada en x como operaciones inversas. Lo que el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo plantea es que la derivada de la integral de una determinada función respecto a x evaluada en un intervalo $[a, b]$ perteneciente a una variable t que comprende desde el inicio del intervalo en a hasta un determinado punto variable x, será igual a esa misma función evaluada en x. Lo anterior significa que la derivación e integración son operaciones inversas, sin embargo, salta a la vista del lector una particularidad que puede conducir a preguntarse cuál es el papel de la variable t. La respuesta a esto es que si en el teorema en cuestión se utilizara la misma variable x, el resultado final tendría un valor nulo, es decir, sería cero; lo anterior no permitiría mostrar con claridad cómo la integración y la derivación son operaciones inversas entre sí, pero a la vez son una unidad indisoluble en donde cada una contiene implícitamente a la otra, es aquí donde se observa la unidad de los unos que son lo uno y contrarios entre sí. Es pues, en el Segundo Teorema Fundamental que el Cálculo encuentra su momento dialéctico y con ello, su tránsito a la consolidación de un paradigma científico que le permite incorporarse con mayor amplitud y profundidad a cuerpos teóricos pertenecientes a la Matemática como formalmente ajenos a ella.

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces para todo x en el intervalo:

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\left[\int_a^x f(t)\Delta t\right] = f(x)$$[68]

XXIV.I Demostración del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Se empieza definiendo F como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\Delta t$$

Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, es posible escribir:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo:

[68] Esta notación pertenece a Leibniz.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\Delta t - \int_a^x f(t)\Delta t\right]^{69}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\Delta t + \int_x^a f(t)\Delta t\right]^{70}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\Delta t\right]^{71}$$

Por el Teorema del Valor Medio para Integrales[72], se sabe que existe un numero c en el intervalo $[x, (x + \Delta x)]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\Delta x$.

Además, como $x \leq c \leq x + \Delta x$ se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\Delta x\right]$$

---

[69] $\int_a^{x+\Delta x} f(t)\Delta t$ representa la integral $F(x)$ evaluada desde a hasta $(x + \Delta x)$, pues este es el primer componente del numerador de la derivada por definición $F'(x)$. Por su parte, $\int_a^x f(t)\Delta t$ representa la integral $F(x)$ evaluada desde a hasta x, pues es el segundo componente del numerador de la derivada por definición $F'(x)$. El signo negativo que media entre las dos evaluaciones de la integral $F\ (x)$ es también el que se encuentra por definición en la derivada $F'(x)$. Finalmente, el cociente Δx de la derivada por definición de $F(x)$ se colocó afuera de la operación aritmética entre integrales, de la forma $\frac{1}{\Delta x}$ sin alterar la expresión.

[70] El cambio de signo se debe a que, por propiedad de las integrales, si se intercambian los límites de integración, se debe cambiar el signo que precede la integral a su opuesto.

[71] Aquí se llega evaluando los límites de integración de la siguiente manera:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}[F(x + \Delta x) - F(a) + F(a) - F(x)]$$

Como se observa, los $F(a)$ se cancelan entre sí, por lo que se obtiene:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}[F(x + \Delta x) - F(x)]$$

Lo anterior no es más que la función primitiva evaluada en la variable independiente más su variación, menos la función primitiva evaluada en la variable independiente. Ahora bien, ¿no es acaso el resultado obtenido sustraerle a la evaluación de la función primitiva en un intervalo mayor la evaluación de la función primitiva en un intervalo menor (pues $x + \Delta x\ > x$)?, en caso de ser afirmativa la respuesta, ¿no es acaso eso encontrar un área bajo la curva?, y de ser así, ¿no es acaso la integral definida a su vez el resultado de sustraerle a la función evaluada en un punto b la evaluación de esa misma función en un punto b en donde $b > a$? Por ello se obtiene el resultado expuesto.

[72] Suponiendo que $\Delta x > 0$.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

$$F'(x) = f(c)$$

Quod erat demonstrandum

XXVI. CONCLUSIONES

Luego de examinar exhaustivamente los principales componentes teóricos del Cálculo Riemanniano, resulta sencillo comprender la vital importancia de su aporte y la genialidad detrás del mismo. En la realidad objetiva dentro de la cual la especie humana está inmersa y forma parte, a pesar que la mayor parte de fenómenos que resultan de interés para la investigación científica puedan ser cuantificados, no de todos puede esperarse observar un comportamiento fácil de modelar. En el caso particular que atañe a esta investigación, sería ingenuo pensar que todas las áreas que se busque encontrar debajo de una curva presentarán comportamientos escalonados, de hecho, esto representa una excepción y no la regla general. El comportamiento que pueden describir las funciones cuyas áreas se interesa calcular pueden presentar los más diversos de los comportamientos, sean trigonométricos, racionales, radicales, logarítmicos, exponenciales, entre muchos otros, debido a que ese comportamiento tan variado responde, ni más ni menos, que a la porción de la realidad objetiva a la que corresponde esa determinada área y que, por consiguiente, es de interés solo para un grupo reducido de ramas de la Ciencia. Cada una de estas áreas del saber bajo sus propios modelos teóricos e instrumentales inherentes a ella representan los comportamientos mencionados de diversas maneras, según lo encuentren conveniente en relación al cuerpo teórico-científico al que responden. Es precisamente esta la importancia fundamental del aporte de Riemann, pues con ello permitió que el Cálculo Integral tuviera una difusión más amplia y profunda de lo que le era posible en el estado en que Leibniz lo había dejado.

Tanto en Economía como en diversas Ingenierías, las funciones que modelan el comportamiento de un área determinada tienen diversos comportamientos, los cuales no necesariamente y solo contando con mucha fortuna, serán de tipo escalonado y es precisamente por ello que resulta comprensible que el auge de la matemática como instrumentalización de diversas ciencias haya tenido lugar después de 1854, fecha en que Bernhard Riemann presenta su investigación teórica para acceder al cargo de profesor auxiliar en la Universidad de Humboldt de Berlín, titulado "*Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica*".

Por otro, pareciera que a lo largo del camino que conduce al Teorema Fundamental del Cálculo se pierde entre la hierba el Principio de Inducción Matemática, uno de los pilares fundamentales de la Teoría Analítica de Números; sin embargo, nada sería más equívoco que concluir esto.

La inducción matemática no solo da pie a la generalización de sumas, a sus teoremas y demostraciones, sino que también permite elevar a una categoría de concretitud superior tales generalizaciones y aplicarlas a problemas histórico-naturales específicos como determinar a través del rudimentario Método por Agotamiento de Arquímides el área bajo una curva.

Sin embargo, la importancia fundamental de la inducción matemática no se limita a esto, puesto que de ella se sirve la Teoría Matemática para acotar funciones en un intervalo específico. Además, gracias a esta maleabilidad de la inducción matemática y su fácil acoplamiento en otras áreas del saber, es que es posible plantear las sumas como tendencias límite, pues la Teoría Analítica de Números posee una cierta omnipresencia en las diversas ramas de la ciencia a la que pertenece. De ahí en adelante, la inducción matemática les cede el protagonismo a otras ramas de las Matemáticas y a sus correspondientes herramientas instrumentales, no por ello dejando de estar presente como fundamento último que permite que dicha labor teórica llegue a buen puerto.

La génesis del Teorema Fundamental del Cálculo, desde Leibniz a Lebesgue, pasando por Riemann, así como sus demostraciones formales, se encuentra en el Principio de Inducción Matemática y precisamente por ello no resulta descabellada la afirmación de aquellos notables matemáticos: "La teoría de números ocupa entre las disciplinas matemáticas una posición idealizada análoga a aquella que ocupan las matemáticas mismas entre las otras ciencias." (Neukirch, Schmidt & Wingberg, 2013).

XXVII. BIBLIOGRAFÍA

Acuña, L. & Calderón, C. (2014). *Sucesiones y Series*. Cartago: Tecnológico de Costa Rica.

Apostol, T. (1996). *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté.

Apostol, T. (1999). *Calculus*. México D.F.: Reverté Ediciones.

Calderón, S. (2000). *Cálculo Integral*. Cartago: Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Calderón, S. (2000). *Cálculo y Análisis II*. Cartago: Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Calvo, R. (2007). *Desarrollo de los Teoremas para la Integral de Riemann-Steiltjes y Lebesgue*. Bogotá: Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

Euclides (1991). *Elementos*. Madrid: Gredos S.A.

Gómez, J. (2016). *Teoría Cuantitativa de los Precios*. Saarbrücken: Editorial Académica Española.

Hegel, F. (2006). *Filosofía de la Lógica*. Buenos Aires: Claridad S.A.

Kuhn, T. (2004). *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Larson, R. & Edwards, B. (2011). *Cálculo*. México D.F.: McGraw-Hill.

Murillo, M. (2010). *Introducción a la Matemática Discreta*. Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Neukirch, J., Schmidt, A. & Wingberg, K. (1999). *Cohomology of Number Fields*. New York: Springer.